UNIVERSITE PARIS XIII

THESES

présentées

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par Khelifa ZIZI

1ère Thèse Théorie de la diffusion pour une classe d'opérateurs de Schrödinger avec des potentiels asymptotiquement coulombiens.

2ème Thèse : Proposition donnée par la Faculté

Soutenues le 17 février 1975 devant la commission d'examen

J. BENABOU : Président
C. BARDOS : Examinateurs
Ph. BENILAN
J.C. GUILLOT
N. VAROPOULOS

UNIVERSITE PARIS XIII

THESES

présentées

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par Khelifa ZIZI

1ère Thèse - Théorie de la diffusion pour une classe d'opérateurs de Schrödinger avec des potentiels asymptotiquement coulombiens.

2ème Thèse - Proposition donnée par la Faculté.

Soutenues le 17 février 1975 devant la commission d'examen

J.BENABOU : Président
C.BARDOS : Examinateurs
Ph.BENILAN
J.C.GUILLOT
N.VAROPOULOS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

أيها الراقدون
تحت التراب....

Je dedie cette thèse à la mémoire de nos chouhadas, en pensant avec une émotion profonde à ceux avec qui j'ai partagé les bancs de l'école et les premiers lieux de liberté, je veux nommer Cherif Benaïcha, Nour-Eddine Bouguerra, Mohamed Bousmaha, Mahmoud Fouza, Khaled Merrakchi, et Farid Zouiméche

Khelifa Zizi

THEORIE DE LA DIFFUSION POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DE SCHRODINGER AVEC DES POTENTIELS ASYMPTOTIQUEMENT COULOMBIENS.

par ZIZI KHELIFA

THEORIE DE LA DIFFUSION POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DE SCHRÖDINGER AVEC DES POTENTIELS ASYMPTOTIQUEMENT COULOMBIEN.

INTRODUCTION

La théorie de la diffusion (ou scattering) a été et est l'objet de nombreuses études. Deux directions semblent prédominantes: la première pourrait être celle tracée par Kato-Kuroda (ainsi que Howland, Ikebe, Rejto) à propos de l'équation de Schrödinger (cf [2], [6], [24], [29], [31], [42]). La deuxième pourrait être celle suivie par Lax-Phillips (ainsi que leurs élèves: Lavita-Majda-Schenk-Thoe) à propos de l'équation des ondes. Cette division schématique et arbitraire, n'exclut pas du tout les interférences. Ainsi la théorie de la diffusion pour tous les systèmes hyperboliques intervenant en mécanique classique et en electromagnétisme a fait l'objet de nombreux travaux de Wilcox [51] et de ses élèves. Dans cette direction, on peut citer aussi Mochizuki [35] et Guillot [17] .

Signalons, pour ne pas allonger cette introduction, l'excellente monographie faite par J.C. Guillot sur le scattering au seminaire Goulaouic-Schwartz [17]. Le but de mon travail est d'appliquer ces méthodes à des opérateurs de Schrödinger du type $-\Delta + q(x)$, où q est un potentiel tendant vers l'infini comme $\frac{K}{|x|}$. Nous symboliserons cet opérateur par la notation:

$$H = \Delta + \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)$$

où $p(x)$ décroit à l'infini au moins comme $|x|^{-(1+\varepsilon)}$ $\varepsilon>0$. Pour $\alpha = 0$, on retrouve l'opérateur étudié par les auteurs précédents. On sait que si $\alpha \neq 0$ il faut reconsidérer un certain nombre de notions (cf [17])

Notre méthode diffère essentiellement des études précédentes par le fait que nous faisons une étude systématique de l'opérateur $H_\alpha = \Delta + \frac{2\alpha}{|x|}$ (où $\frac{2\alpha}{|x|}$ n'est pas considéré comme une perturbation). C'est $p(x)$ qui est

une perturbation.

Cette étude systématique occupe le chapitre 1: nous définissons une extension autoadjointe H_α attachée à $\Delta + \frac{2\alpha}{|x|}$. Nous étudions son spectre et donnons l'expression de la mesure spectrale de H_α. Nous exprimons le noyau de l'opérateur $(H_\alpha - k^2)^{-1}$ pour $Imk > 0$. nous examinons aussi le problème des opérateurs d'ondes de Dollard. Nous obtenons dans R^n pour $n \geqslant 2$ l'expression stationnaire donnée par Dollard dans R^3([14]) pour les opérateurs d'ondes $W_\pm(H_\alpha H_o)$. Nous généralisons dans $L^2(R^n)$ un théorème obtenu, dans le cas $\alpha = 0$, par Kuroda [31] concernant l'existence des opérateurs d'ondes $W_\pm(H,H_o)$.

Le chapitre 2 est consacré à une généralisation d'un théorème de Kato concernant le comportement asymptotique des solutions à support non compact, de l'équation :

$$(\Delta + p_1(x) + p_2(x) + k^2)\, u = 0 \quad , \quad k > 0$$

pourvu que p_1 et p_2 satisfassent à certaines conditions de décroissance à l'infini. Ce travail est une amélioration de celui de Kato [28] et de Agmon [1].

Dans le chapitre 3, nous supposons que le potentiel p est à symétrie sphérique. Sous des hypothèses d'un bon comportement à l'infini, et d'un comportement pas mauvais à l'origine, nous construisons une extension autoadjointe H invariante par rotation.

Nous obtenons avec des méthodes de diffusion, l'absolu continuité de H dans R_+ et la complétude des opérateurs d'ondes $W_\pm(H,H_\alpha)$.

Les hypothèses sur p s'expriment simplement par la condition (C.1)

$$((C.1)) \quad \int_0^{+\infty} \frac{r}{1+r} \, |p(r)| \, dr < +\infty$$

Pour $\alpha = 0$, ce travail a été fait par Green-Landford ([19]) Kuroda ([31]). . Pour $\alpha \neq 0$, des résultats parallèlles onr été obtenus par D. MARCHESIN et M. L. O"CAROLL ([37]), REJTO ([42]), GEORGESCU (Thèse Genève).

Dans le chapitre 4, nous abordons le problème extèrieur. L'opérateur H est défini dans $L^2(\Omega)$ par:

$$D(H) = \{u \in H^2(\Omega) : u_{|\Gamma_1} = 0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma u_{|\Gamma_2} = . \ \}$$

$$Hu = (- \Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p)u$$

où Ω est le domaine extérieur à une hypersurface compacte Γ notée $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Pour $\alpha = 0$, on peut citer le travail fait par T. Ikebé [25], Schenk-Thoé [45]; Majda [32] . Pour $\alpha \neq 0$, les seuls résultats que nous connaissons sont ceux obtenus par J.C. GUILLOT [17] lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, et n impair. Pour ne pas alourdir la rédaction, nous nous sommes contentés à traiter uniquement le cas où p est une fonction C^∞ à support compact. Le cas général que nous rédigerons dans une publication ultérieure résultera d'un passage à la limite après avoir approximé le potentiel donné par des potentiels C^∞ à support compact.

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ici tous mes remerciements à Monsieur J.C. Guillot pour les encouragements que j'ai trouvés auprès de lui, dans l'étude de la diffusion.

Je remercie beaucoup Monsieur Calvin Wilcox qui a bien voulu s'intéresser à mon travail. Les discussions que j'ai eues avec lui ont été très fructueuses et m'ont permis de bien avancer.

Monsieur N. Varapoulos a bien voulu me proposer le 2ème sujet. Je tiens à le remercier de la manière dont il l'a fait.

Monsieur P. Benilan a eu la très lourde tâche d'analyser ce travail. Je n'ai été que réjoui par le soin qu'il a pris dans cette lecture. Cela me permet de le remercier très sincèrement.

Enfin, je remercie Monsieur C. Bardos et Monsieur J. Bénabou qui m'ont fait l'amitié d'accepter de participer au jury.

Je ne sais pas si cette thèse aurait pu voir le jour sans l'aide compréhensive de Jacqueline Zizi. Les innombrables moments qu'elle a consacrés à m'écouter m'ont permis de clarifier bien des situations. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

M^me Jariel, M. Rabello, ainsi que Mesdames Becu et Das Chagas ont apporté un soin très attentif et beaucoup de diligence dans la dactylographie et le tirage de cette thèse. Je les remercie vivement.

Table de Matières

Chapitre 1

L'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ dans $L^2(R^n)$, $n \geq 2$, $\alpha \in R$. Expression stationnaire des opérateurs d'ondes de Dollard. Généralisation du théorème de J.M. COOK - S.T. KURODA.

Introduction 6

§ 1 - Définition et étude spectrale des opérateurs A_α^ℓ :

$$A_\alpha^\ell = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mu^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}\ ,\ \mu = \ell + \frac{n-2}{2}\ ,\ \alpha \in R\ ,\ 0 < r < +\infty$$

1.1 - Définition d'une extension auto-adjointe A_α^ℓ 7

1.2 - Etude du spectre de cette extension 13

1.3 - Décomposition spectrale de l'opérateur A_α^ℓ 19

§ 2 - Définitions et étude spectrale de l'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$

2.1 - L'opérateur H_α somme directe des opérateurs A_α^ℓ 28

2.2 - Spectre ponctuel, fonctions propres de l'opérateur H_α

2.3 - Fonctions propres généralisées de H_α ; Développement en fonctions propres. 36

2.4 - Solution fondamentale sortant de l'opérateur $H_\alpha - k^2$ 44

§ 3 - Expression stationnaire des opérateurs d'ondes de Dollard et généralisation du théorème de J.M. COOK et S.T. KURODA.

3.1 - Expression stationnaire des opérateurs d'ondes $W_\pm^D(H_\alpha, H_o)$ 56

3.2 - Généralisation du théorème de J.M. COOK et S.T. KURODA 73

Chapitre 2

Généralisation du théorème d'unicité de T. KATO

Introduction 81

Enoncé du théorème d'unicité 81-82

Chapitre 3

Perturbations de l'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ par des potentiels à symétrie sphérique.

Introduction 91

§1 Définitions de l'opérateur auto-adjoint H - Existence et completude des opérateurs d'ondes $W_\pm(H_\alpha, H)$.

1.1 Estimations des normes des opérateurs VR_α^ℓ, $AR_\alpha^\ell B$ dans $L^2(R^+)$ 91

1.2 Existence d'une extension auto-adjointe H associée à l'expression formelle $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + q(|x|)$ 94

1.3 Existence et completude des opérateurs d'ondes $W_\pm(H_\alpha, H)$ 99

§2 Développement en fonctions propres de l'opérateur H - Expression Stationnaire des opérateurs d'ondes et de la matrice S .

1. Introduction 100

2.1 Proprietés des opérateurs $VR_\alpha^\ell(k^2)$ (resp. $R_\alpha^\ell(k^2)V$) dans $\mathcal{B}$(resp.$\mathcal{B}^*$) 103

2.2 Inversibilité de l'opérateur $I \pm VR_\alpha^\ell(k^2)$ dans $\mathcal{L}(B)$, $Imk \geq 0$ ... 110

2.3 Absolue continuité de l'opérateur H

2.4 Enoncé du théorème principal

Chapitre 4

Théorie de la diffusion pour l'opérateur $H_{\alpha,p} = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p$ dans le problème extérieur.

§1. Définition d'une extension auto-adjointe $H_{\alpha,p}$ associée à l'expression formelle $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p$, à l'extèrieur d'un compact. Existence des opérateurs d'ondes $W_\pm(H_\alpha, H_\alpha + p)$

§2. Développement en fonctions propres de l'opérateur $H_{\alpha,p}$ Expression des opérateurs d'ondes.

Introduction

2.2 Existence des solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation 134

$$(\Delta + k^2 + \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)u = f, \quad k \in C^{\pm} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

2.3 Existence des solutions dans $L^\infty(\bar{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\bar{\Omega})$ du problème 137

$$(+\Delta + k^2 + \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)u = f \qquad k \in C^{\pm}_{\alpha}, \ x \in \Omega$$

$$(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma)u = g \qquad x \in \Gamma_1$$

$$u = h \qquad x \in \Gamma_2$$

2.4 Enoncé du théorème principal. 139

CHAPITRE I

L'operateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, $\alpha \in R$

Expression stationnaire des operateurs d'ondes de Dollard.

Généralisation du théorème de J.M. COOK - S.T. KURODA.

Introduction

L'objet de ce chapître est de rassembler tous les éléments dont nous avons besoin pour l'étude que nous nous sommes proposé. Certains d'entre eux sont, suivant la formule consacrée bien connus. Cependant, faute de pouvoir renvoyer le lecteur à des références précises, nous avons préféré donner, ici, une démonstration de la plupart des théorèmes. Nous décrivons le spectre de l'opérateur H_α. Nous donnons l'expression du noyau de la transformation de Fourier généralisée de H_α, en particulier, lorsque α est strictement positif, les valeurs propres et les fonctions propres normalisées de H_α.

Enfin, nous donnons diverses expressions du noyau de Green de l'opérateur $H_\alpha - k^2$ pour k^2 n'appartenant pas au spectre ponctuel de H_α. En particulier, nous démontrons que ce noyau permet de définir l'opérateur résolvant $(H_\alpha - k^2)^{-1}$ (pour k^2 dans l'ensemble résolvant de H_α) dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette étude est basée essentiellement sur la propriété qu'a l'opérateur H_α d'être invariant par rotation. D'une façon plus naïve, si

$$u(x) = r^{-\frac{n-1}{2}} f(r)\ Y_m^\ell(\theta,\phi)$$

où $r = |x|$, $Y_m^\ell(\theta,\phi)$ un harmonique sphérique de degré ℓ, alors :

$$(Hu)(x) = r^{-\frac{n-1}{2}} \left[-\frac{d^2}{(dr)^2} + \frac{(\ell + \frac{n-1}{2})(\ell + \frac{n-3}{2})}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}\right] f(r)\ Y_m^\ell(\theta,\phi)$$

$$= r^{-\frac{n-1}{2}} (A_\alpha^\ell f)(r)\ Y_m^\ell(\theta,\phi)$$

Le problème, dès lors, est ramené à l'étude des opérateurs A_α^ℓ dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Pour cela, nous suivrons la méthode de Dunford-Schwartz, Kodaïra, Titchmarch. Les résultats concernant la fonction de Green ont été donnés par Hostler dans ([23]). Nous démontrons une nouvelle relation de récurrence entre la fonction de Green de H_α dans $\mathbb{R}^p$ et celle dans $\mathbb{R}^{p+2}$. Cette relation, différente de celle de Hostler, nous sera très utile pour l'étude de ce noyau dans $\mathbb{R}^n$.

§ 1 - Définition et Etude Spectrale des opérateurs A_α^ℓ

1 - 1 Définition d'une extension autoadjointe A_α^ℓ :

Posons formellement :

$$(Pu)(r) = -u''(r) + \left(\frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}\right) u(r) \quad ; \quad \mu = \ell + \frac{n-2}{2}$$

$$0 < r < +\infty$$

$$-\infty < \alpha < +\infty$$

Nous désignons par :

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ = l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $]0, +\infty[$ à support compact.

$H^2_{Loc}(\mathbb{R}^+)$ = l'espace des distributions u, telles que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, ϕu et ses dérivées premières et secondes sont dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

$H^2_\tau(\mathbb{R}^+)$ = l'espace des fonctions $u \in H^2_{Loc}(\mathbb{R}^+)$ telles que u et τu appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^+)$

Nous désignons par τ_0 (resp. τ_1) l'opérateur minimal (resp. maximal) ainsi défini :

$$\begin{cases} D(\tau_0) = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \\ \tau_0 u = P u \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(\tau_1) = H^2_\tau(\mathbb{R}_+) \\ \tau_1 u = P u \end{cases}$$

Il est clair que τ_0 est symétrique. D'autre part, il est facile de montrer que $(\tau_0)^* = \tau_1$. Comme τ_0 est réel, il possède des extensions autoadjointes et, d'après la relation précédente, toute extension est une restriction de τ_1. Pour déterminer toutes ses extensions, nous sommes conduits à étudier les solutions de l'équation différentielle :

$$(P u)(r) = k^2 u(r)$$

Posons $u(r) = \phi(-2ikr)$ (ou $\psi(2ikr)$) suivant que $\mathrm{Im}\, k \geq o$ (ou $\mathrm{Im}\, k \leq o$); alors la fonction ϕ (ou ψ) satisfait l'équation Whittaker :

$$W''(z) + \left\{ \frac{-\mu^2 + \frac{1}{4}}{z^2} + \frac{\nu}{z} - \frac{1}{4} \right\} W(z) = o$$

Nous utiliserons les solutions suivantes [36]

$$\phi_1(k,r) = M_{\frac{i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikr) = e^{ikr}(-2ikr)^{\ell + \frac{n-1}{2}}\, {}_1F_1\left(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k} ; 2\ell+n-1 ; -2ikr\right)$$

$$\phi_2(k,r) = W_{\frac{i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikr) = e^{ikr}(-2ikr)^{\ell + \frac{n-1}{2}}\, \mathcal{U}\left(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k} ; 2\ell+n-1 ; -2ikr\right)$$

$$\tilde{\phi}_2(k,r) = W_{\frac{-i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(+2ikr) = e^{-ikr}(+2ikr)^{\ell + \frac{n-1}{2}}\, \mathcal{U}\left(\ell + \frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k} ; 2\ell+n-1 ; 2ikr\right)$$

$$[\phi_1, \phi_2] = \phi_2 \frac{d\phi_1}{dz} - \phi_1 \frac{d\phi_2}{dz} = -2ik \frac{\Gamma(2\ell + n-1)}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})} \qquad o < \arg k \leq \frac{\Pi}{2}$$

$$[\phi_1, \tilde{\phi}_2] = 2ik\, e^{i\frac{\Pi}{2}(2\ell+n-3)} \frac{\Gamma(2\ell + n-1)}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k})} \qquad -\frac{\Pi}{2} < \arg k < o$$

Les comportements de ϕ_1 et ϕ_2 sont :

A l'origine : <u>1er cas : $2\ell + n-2 = o$</u>

$$\phi_1(k,r) = (-2ikr)^{1/2}\,(1 + O(|kr|^{3/2}))$$

$$\phi_2(k,r) = \frac{(-2ikr)^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\alpha}{k})} \mathrm{Log}(-2ikr)\,(1 + O(|kr|^{1/2}))$$

<u>2ème cas : $(2\ell + n-1)\,(2\ell + n-3) = o$</u>

$$\phi_1(k,r) = (-2ikr)\,(1 + O(|kr|))$$

$$\phi_2(k,r) = \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{i\alpha}{k})}\,(1 + O(|kr|\ \mathrm{Log}\ |kr|))$$

$3^{\text{ème}}$ cas : $2\ell + n-3 > o$

$$\phi_1(k,r) = (-2ikr)^{\ell + \frac{n-1}{2}} \quad (1 + O(|kr|)$$

$$\phi_2(k,r) = \frac{\Gamma(2\ell + n-2)}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})} \quad (-2ikr)^{-(\ell + \frac{n-3}{2})} \quad (1 + O(|kr|)$$

infini : Si $\operatorname{Im} k > o$

$$\phi_1(k,r) = \frac{\Gamma(2\ell + n-1)}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})} \quad e^{-ikr} \ (-2ikr)^{-\frac{i\alpha}{k}} \quad (1 + O(|kr|^{-1})$$

$$\phi_2(k,r) = e^{ikr} \ (-2ikr)^{\frac{i\alpha}{k}} \quad (1 + O(|kr|^{-1})$$

Si $\operatorname{Im} k < o$

$$\phi_1(k,r) = \frac{\Gamma(2\ell + n - 1)}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k})} \quad e^{ikr} \ (-2ikr)^{\frac{i\alpha}{k}} \ e^{-i\Pi(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})} \quad (1+O(|kr|^{-1}$$

$$\tilde{\phi}_2(k,r) = e^{-ikr} \ (2ikr)^{-\frac{i\alpha}{k}} \quad (1 + O(|kr|^{-1}))$$

s démontrons alors le théorème suivant : $(\mu = \ell + \frac{n-2}{2})$

Théorème 1.1

(1) Si $\mu \geq 1$, l'opérateur τ_1 est autoadjoint .

(2) Si $\mu^2 = \frac{1}{4}$, il existe $\phi_+ \in D(\tau_1)$ et $\phi_- \in D(\tau_1)$ telles que toutes les extensions autoadjointes τ sont caractérisées par :

$$D(\tau) = \{u \in D(\tau_1) : k_1 A_+(f) + k_2 A_-(f) = o\}$$

où $A_\pm(f) = \lim_{\varepsilon \to o} [\phi_\pm, f] (\varepsilon)$; $k_1^2 + k_2^2 \neq o$; ($[\phi_\pm, f]$ désigne le Wronskien de $\phi_\pm$ et f)

(3) Si $\mu = o$, il existe $\psi_+ \in D(\tau_1)$ et $\psi_- \in D(\tau_1)$ telles que toutes les

extensions autoadjointes τ sont caractérisées par :

$$D(\tau) = \{u \in D(\tau_1) : k_1 \; A_+(f) + k_2 \; A_-(f) = o\}$$

où $A_\pm(f) = \lim_{\varepsilon \to o} [\psi_\pm , f] (\varepsilon)$ $\quad k_1^2 + k_2^2 \neq o$ ($[\psi_\pm, f]$ désigne le Wronskien de $\psi_\pm$ et f)

Preuve :

Supposons $\operatorname{Im} k^2 \neq o$, par suite $\operatorname{Im} k \neq o$ $\arg k \neq o \neq \frac{\Pi}{2}$, ϕ_1 n'est alors jamais de carré intégrable alors que ϕ_2 (resp. $\widetilde{\phi}_2$) est de carré intégrable si $\operatorname{Im} k > o$ (resp. $\operatorname{Im} k < o$). Donc, d'après [15] Théorème XIII 2.30, nous ne pouvons être que dans la situation (iii) ou (iv) de ce théorème. Le comportement à l'origine ci-dessus montre que si $\mu \geq 1$, ϕ_2 n'est pas de carré intégrable tandis que ϕ_1 l'est. Par suite, si $\mu \geq 1$ nous sommes dans la situation (iv) c'est-à-dire :

(1.2) $$\forall f,g \in D(\tau_1) : (\tau_1 f \mid g) = (f \mid \underset{1}{\tau} g)$$

Comme $\tau_1 = (\tau_o)^*$ nous avons, d'après (1.2) $\tau_1 \subset \tau_1^* = (\tau_o^*) = \bar{\tau}_o$

Comme τ_1 est fermé et $\tau_o \subset \tau_1$; $\bar{\tau}_o \subset \tau_1$ donc τ_1 est autoadjoint.

Si $A_\alpha^\ell = \tau_1$; A_α^ℓ est autoadjoint dans le cas $\mu \geq 1$

Dans le cas $(2\mu - 1)(2\mu + 1)\, 2\mu = o$; il y a deux fonctions de carré intégrable à l'origine (évidemment linéairement indépendantes grâce à (1.1). Nous sommes donc dans la situation (iii) du théorème cité. Il existe donc une base de valeurs limites constituée par deux valeurs limites réelles indépendantes à l'origine : A_1 et A_2 ; et :

$$(\tau f \mid g) - (f \mid \tau g) = A_1(f)\, A_2(g) - A_1(g)\, A_2(g)$$

Posons, dans le cas $\mu^2 = \frac{1}{4}$:

$$\phi_+(r) = r\, \psi$$
$$\phi_-(r) = (1 - 2\alpha r \operatorname{Log} r)\, \psi$$

où ψ est une fonction égale à 1 au voisinage de 0, appartenant à $C^\infty(]o, +\infty[)$, à support limité à droite.

Dans ces conditions ϕ_+ et ϕ_- appartiennent à $L^2(o, +\infty)$. D'autre part, $\tau\phi_+ = -2\alpha$ et $\tau\phi_- = 4\alpha^2 \text{Log } r$ au voisinage de 0, donc : $\tau\phi_+ \in L^2(o, +\infty)$ et $\tau\phi_- \in L^2(o, +\infty)$, car elles sont très régulières et à support limité à droite.

Par suite, les formes linéaires :

$$f \longrightarrow (\tau f \mid \phi_+) - (f \mid \tau\phi_+) = A_+(f)$$

$$f \longrightarrow (\tau f \mid \phi_-) - (f \mid \tau\phi_-) = A_-(f)$$

sont définies sur $D(\tau_1)$ et continues pour la norme du graphe car :

$$|A_\pm(f)| \leq a_\pm \, ||f||_{D(\tau_1)} \quad \text{où} \quad a_\pm \leq \text{Sup}(||\phi_\pm||_{L^2}, ||\tau\phi_\pm||_{L^2}).$$

Elles sont d'autre part, linéairement indépendantes car :

$$A_+(\phi_+) = A_-(\phi_-) = o \quad \text{et} \quad A_+(\phi_-) = -A_-(\phi_-) = -1$$

Comme nous savons que l'espace des valeurs limites est de dimension 2 et qu'il est constitué par des valeurs limites au point 0, elles engendrent donc l'ensemble des valeurs limites .

Notons que : $A_+(f) = \int_o^{+\infty} (\phi_+'' f - \phi_+ f'') \, dr$

$$A_-(f) = \int_o^{+\infty} (\phi_-'' f - \phi_- f'') \, dr$$

et comme ϕ est à support limité à droite, en intégrant par parties nous obtenons :

$$A_+(f) = \lim_{\varepsilon \to o} [\phi_+ , f] (\varepsilon) \qquad A_-(f) = \lim_{\varepsilon \to o} [\phi_- , f] (\varepsilon)$$

où $\phi_+(r) = r$ $\phi_-(1) = (1 - 2\alpha r \text{ Log } r)$ pour r assez petit .

Il faut remarquer que A_+ peut se simplifier. En effet, comme $\lim_{\varepsilon \to o} \phi_-(\varepsilon) =$

on ne change pas la valeur de $A_+(f)$ en posant :

$$A_+(f) = \lim_{\varepsilon \to o} \phi_-(\varepsilon) \left[\phi_+ , f\right](\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to o} \left[\phi_-(\varepsilon) (f(\varepsilon) - \varepsilon f'(\varepsilon)\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o} (1 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon \phi_-'(\varepsilon)) f(\varepsilon) - \phi_-(\varepsilon) f'(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to o} (1 + 2\alpha\varepsilon) f(\varepsilon) + \varepsilon A_-(\varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o} f(\varepsilon)$$

Pour démontrer la $3^{ème}$ partie du théorème $(\mu = o)$, il suffit de considérer les deux fonctions :

$$\psi_+(r) = r^{1/2} (1 - 2\alpha r) \psi$$

$$\psi_-(r) = r^{1/2} ((1 - 2\alpha r) \operatorname{Log} r + 4\alpha r) \psi$$

On vérifie de la même façon que ψ_+ et ψ_- appartiennent à $D(\tau_1)$ et que les formes linéaires :

$$B_+(f) = (\tau f \mid \psi_+) - (f \mid \tau\psi_+) = \lim_{\varepsilon \to o} \left[f , \psi_+\right] (\varepsilon)$$

$$B_-(f) = (\tau f \mid \psi_-) - (f \mid \tau\psi_-) = \lim_{\varepsilon \to o} \left[f , \psi_-\right] (\varepsilon)$$

engendrent l'espace des conditions limites.

Par suite la conclusion du théorème découle du corollaire XIII 2-31 [15]

Nous selectionnons maintenant une extension autoadjointe. Nous appelons A_α^ℓ l'opérateur autoadjoint défini par :

(1) $\mu \geqslant 1$ $\quad D(A_\alpha^\ell) = H_\tau^2 (\mathbb{R}_+)$ $\quad A_\alpha^\ell u = \tau u$

(2) $\mu^2 = \frac{1}{4}$ $\quad D(A_\alpha^\ell) = \{u \in H_\tau^2 (\mathbb{R}_+) : \lim_{\varepsilon \to o} u(\varepsilon) = o\}$

(3) $\mu = o$ $\quad D(A_\alpha^\ell) = \{u \in H_\tau^2 (\mathbb{R}_+) : \lim_{\varepsilon \to o} \left[u, \psi_+\right] (\varepsilon) = o\}$.

Ce choix est motivé par le fait que dans le cas $\mu^2 = \frac{1}{4}$ et $\mu = o$, seule la fonction ϕ_1 satisfait la condition limite à l'origine.

1.2 - Etude du Spectre de l'extension A_α^ℓ :

Une partie des résultats obtenus dans ce sous paragraphe peuvent être obtenus par la méthode des perturbations. En effet, on peut certainement montrer que $\frac{\alpha}{r}$ est une perturbation relativement compacte pour l'opérateur de Bessel $A_o = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2}$ ce qui impliquerait que dans $]-\infty, o[$, le spectre (s'il n'est pas vide) est seulement constitué de valeurs propres de multiplicités finies (cf. par exemple Schechter [44]).

La méthode que nous employons est empruntée à Dunford-Schwartz : elle permet de calculer explicitement les valeurs propres et surtout d'exhiber une base orthonormale de chaque sous-espace propre.

Proposition 1.1

Soit A_α^ℓ l'extension autoadjointe associée à l'opérateur différentiel formel $\tau = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}$ $(\mu = \ell + \frac{n-2}{2})$: le spectre essentiel est dans tous les cas égal à $[o, +\infty[$

Si $\alpha \leq o$, $\sigma(A_\alpha^\ell) = [o, +\infty[$

Si $\alpha > o$, outre $[o, +\infty[$, le spectre se compose d'une suite λ_p de valeurs propres négatives

$$\lambda_p = -\frac{\alpha^2}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)^2} \quad , \quad p = o, 1, 2, \ldots.$$

Preuve :

Les théorèmes sur lesquels nous nous appuyons se trouvent dans [15] chap. XIII. Tout d'abord, grâce au théorème 7.4 le spectre essentiel de τ est la réunion des spectres essentiels de τ_1, restriction de τ à $[1, +\infty[$ et de τ_2 restriction de τ à $]o,1]$.

Posons $q(r) = \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}$; comme $q(r) \to o$ lorsque $r \to +\infty$, il résulte du théorème 7.16 que $\sigma_e(\tau_1) = [o, +\infty[$

D'autre part, comme : $\lim_{r \to o} |q(r)|r^2 = \mu^2 - \frac{1}{4}$, si $\mu^2 < 1$ $\quad \sigma_{\ell}(\tau_2) = \phi$

d'après le théorème 7.17 .

Donc, si $\mu^2 < 1$ on a bien $\sigma_{\ell}(\tau) = [o, +\infty[$

Si $\mu^2 > 1$, τ est semi borné inférieurement . En effet : .

soit $r_o = \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{2\alpha} > o$, alors , si $f \in D(\tau_o)$

$$(\tau f \mid f) = \{\int_o^{r_o} + \int_{r_o}^{+\infty}\} |f'(r)|^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r} - 2\alpha\right)|f(r)|^2 \, dr$$

$$\geq \int_{r_o}^{+\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r} - 2\alpha\right)|f(r)|^2 dr \geq \frac{-\alpha^2}{\mu^2 - \frac{1}{4}} (f|f)$$

τ peut se déduire de τ' (semi borné inférieurement) par addition d'un opérateur formellement autoadjoint positif : de façon précise :

$$\tau = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{4r^2} - \frac{2\alpha}{r} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{2}}{r^2} = \tau' + \frac{\mu^2 - \frac{1}{2}}{r^2}$$

le théorème 7.34 implique alors : $\sigma_{\ell}(\tau) \cap]-\infty , o[= \phi$.

Comme A_α^ℓ est autoadjoint, le complémentaire du spectre essentiel est constitué par les valeurs propres isolées de multiplicité finie.

Nous allons examiner la possibilité de trouver des fonctions $u \in D(A_\alpha^\ell)$ satisfaisant $\tau u = \lambda u$

L'étude faite en 1. , montre que si $\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})^{-1} \neq o$ avec $2\ell + n - 1 > o$, toute solution de $\tau u = \lambda u$ est combinaison linéaire de ϕ_1 et ϕ_2 . De sorte qu'il est clair que si $\lambda > o$, il n'y a pas de solutions dans $L^2(I)$, donc pas de valeurs propres.

Supposons par contre λ strictement négatif. Alors, en raison des comportements des solutions ϕ_1 et ϕ_2 , et dans le cas $2\ell + n - 3 < o$, en raison des conditions limites imposées, aucune combinaison linéaire de ϕ_1 et ϕ_2 ne peut appartenir à $D(A_\alpha^\ell)$

Comme $\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})^{-1}$ est différent de 0 si α est négatif ou nul

(avec $2\ell + n - 1 > o$) nous pouvons donc dire que pour $n \geq 2$

$$\sigma(A_\alpha^\ell) = \sigma_e(A_\alpha^\ell) = [o , \infty[$$

Si α est strictement positif et si λ satisfait à

$$\lambda_p = \frac{-\alpha^2}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)^2} \qquad p = o, 1, 2, \ldots . \tag{1.3}$$

ϕ_1 et ϕ_2 sont colinéaires, et appartiennent à $D(A_\alpha^\ell)$.

Si λ est distinct de ces valeurs $\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})^{-1} \neq o$.

Donc, si $\alpha > o$, le spectre de A_α^ℓ est constitué, outre l'intervalle $[o, +\infty[$, par les valeurs propres λ_p données par (1.3) si $2\ell + n-1 > o$. Ces conclusions demeurent vraies si $n = 1$, $\ell = o$ puisque l'opérateur est le même que pour $n = 3$, $\ell = o$.

Corollaire 1.1

A_α^ℓ , l'extension autoadjointe associée à l'opérateur différentiel formel $\tau = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(\mu^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}$, est semi bornée inférieurement.

Preuve : conséquence du lemme XIII 7.21 [15]

Théorème 1.2

Soit A_ℓ^α l'extension autoadjointe associée à l'opérateur différentiel formel $\tau = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(\mu^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}$. On suppose $\alpha > o$ et $n \geq 2$:

Le spectre ponctuel de A_α^ℓ est égal à l'ensemble $\{\lambda_p\}$.

$$\lambda_p = -\frac{\alpha^2}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)^2}$$

La multiplicité de λ_p est égale à 1, et la fonction propre normalisée associée est donnée par :

$$\phi_p(r) = c_p\, e^{-\frac{\alpha r}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)}}\, (2\alpha r)^{\ell + \frac{n-1}{2}}\, \frac{p!}{(2\ell+n-1)_p}\, L_p^{2\ell+n-2}\left(\frac{2\alpha r}{\ell + \frac{n-1}{2} + p}\right)$$

$$|c_p|^2 = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\, \frac{\Gamma(2\ell + n - 1 + p)}{\Gamma(2\ell + n - 1)^2}\, \frac{\alpha}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)}$$

L_p^k est le polynôme de Laguerre de paramètres p,k .

Preuve :

Nous avons vu que si $\alpha > o$ le spectre dans $]-\infty , o]$ se compose d'une suite (λ_p) de valeurs propres, et que dans $]o, +\infty[$ il n'y avait pas de valeurs propres. Reste à examiner le cas $\lambda = 0$. Une base des solutions de l'équation $\tau u = o$ est donnée par :

$$\phi_1(r) = r^{1/2}\, H_{2\mu}^{(1)}\, (2(2\alpha r)^{1/2})$$

$$\phi_2(r) = r^{1/2}\, H_{2\mu}^{(2)}\, (2(2\alpha r)^{1/2})$$

où $H_\lambda^i(z)$ pour $i = 1,2$ sont les fonctions de Hankel.

Si $\alpha > o$, aucune combinaison linéaire de ces deux solutions ne peut être de carré intégrable à l'infini. Donc, dans ce cas : $0 \notin \sigma_p(A_\alpha^\ell)$
Si $\alpha < o$, $\mu \geq 1$; nous arrivons à la même conclusion en considérant l'origin
Si $\alpha < o$, $\mu \leq 1$, ϕ_1 est de carré intégrable dans $\mathbb{R}^+$ mais dans les deux cas $n = 2$ et $n = 3$, ϕ_1 ne satisfait pas aux conditions limites imposées à l'origine donc $0 \notin \sigma_p(A_\alpha^\ell)$ $\forall \alpha \neq o$.

Si $\alpha = o$ nous arrivons à la même conclusion avec les solutions du type

$$A\, r^{\ell + \frac{n-1}{2}} + B\, r^{-(\ell + \frac{n-3}{2})}$$

D'autre part, le même raisonnement montre que lorsque λ_p existe, la multiplicité est 1. Toute fonction propre est proportionnelle à

) $\phi_1(\lambda_p, r) = \phi_p(r) = c_p\, e^{-\frac{\alpha r}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)}} \left(\frac{2\alpha r}{\ell + \frac{n-1}{2} + p}\right)^{\ell + \frac{n-1}{2}}$ $_1F_1\left(-p; 2\ell+n-2; \frac{2\alpha r}{\ell + \frac{n-1}{2} + p}\right.$

obtenue en remplaçant λ par λ_p , ou encore k par $\frac{ia}{\ell + \frac{n-1}{2} + p}$

En introduisant la relation entre F_{11} et les polynômes de Laguerre donnée dans [36] :

(1.4) $$F_{11}(-p\ ;\ 2\ell + n-1\ ;\ z) = \frac{p!}{(2\ell + n-1)_p} L_p^{(2\ell+n-2)}(z)$$

nous obtenons, à la constante près la formule du théorème. Pour calculer la constante de normalisation (i.e $||\phi_p||_{L^2} = 1$) , nous utilisons le corollaire 5.30 du XIII [15] et la remarque du théorème 5.16 . Cela nous donne :

$$\{E(\{\lambda_p\})\ f\}(r) = k_p\ \phi_1(\lambda_p, r) \int_o^{+\infty} \phi_2(\lambda_p, s)\ f(s)\ ds$$

où k_p est le résidu de l'inverse du wronskien de ϕ_1 , ϕ_2 au point $\lambda = \lambda_p$.

D'autre part, en tenant compte des fonctions normalisées :

$$\{E(\{\lambda_p\})\ f\}(r) = |c_p|^2\ \phi_1(\lambda_p, r) \int_o^{+\infty} \phi_1(\lambda_p, s)\ f(s)\ ds$$

et en tenant compte de la relation qui existe entre $\phi_1(\lambda_p, r)$ et $\phi_2(\lambda_p, r)$:

$$F_{11}(-p\ ;\ 2\ell + n-1\ ;\ z) = \frac{(-1)^p}{(2\ell + n-1)_p}\ \mathcal{U}(-p\ ;\ 2\ell + n-1\ ;\ z)$$

la relation (1.5) devient :

$$\{E(\{\lambda_p\})\ f\}(r) = k_p(-1)^p\ \frac{\Gamma(2\ell + n-1)}{\Gamma(2\ell + n-1 + p)}\ \phi_1(\lambda_p, r) \int_o^{+\infty} \phi_1(\lambda_p, s)\ f(s)\ ds$$

D'où en comparant (1.6) et (1.7)

$$|c_p|^2 = (-1)^p\ k_p\ \frac{\Gamma(2\ell + n-1 + p)}{\Gamma(2\ell + n-1)} = (-1)^p\ \frac{\Gamma(2\ell + n-1 + p)}{\Gamma(2\ell + n-1)}\ \mathrm{Res}\left(\frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{ia}{\sqrt{\lambda}})}{2i\ \lambda}\ ;\ \lambda=\right.$$

Posons $\lambda = \lambda_p + z$; alors :

$$(\lambda_p+z)^{-\frac{1}{2}} = \lambda_p^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\ \frac{3}{\lambda p} + \ldots.\right)$$

$$\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda_p+z}} = \ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda_p}} + \frac{i\alpha z}{2\lambda_p^{3/2}} + \ldots.$$

et en tenant compte de : $\lambda_p = \dfrac{-\alpha^2}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)^2}$

$$\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda_p+z}} = -p + \frac{i\alpha z}{2\lambda^{\frac{3}{2}}_p}$$

Par suite ; $$\frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\lambda}}{2i\sqrt{\lambda}} = \frac{\Gamma(-p + \frac{i\alpha z}{2\lambda^{3/2}_p} + \ldots.}{2i\sqrt{\lambda_p+z}}$$

En tenant compte :

$$\Gamma(\omega - p) = \frac{(-1)^p\ \Pi}{\sin \Pi\omega\ \Gamma(p+1-\omega)}$$

Nous avons :

$$\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}}) = \frac{(-1)^p}{\sin \Pi\ (\frac{i\alpha z}{2\lambda_p^{3/2}} + \ldots)\ \Gamma(p+1 - \frac{i\alpha z}{2\lambda_p^{3/2}}}$$

Par suite :

$$\lim_{z \to o} \left[z\ \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda_p+z}}}{2i\sqrt{\lambda_p+z}} \right] = \frac{(-1)^p}{\alpha}\ \frac{-\lambda p}{\Gamma(p+1)} = \frac{(-1)^p}{\alpha}\ \frac{1}{p!}\ \frac{\alpha^2}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)}$$

Ce qui donne l'expression de c_p . Nous en déduisons l'expression exacte de ϕ_p donnée dans la formule du théorème (1.2) .

1.3- Décomposition spectrale de l'opérateur A_α^ℓ

Lorsque $\alpha = \ell = o$, l'opérateur A_o^o est donc défini par $(A_o^o u)(r) = -u''(r)$
et $D(A_o^o) = \{u \in C^1([o, +\infty[) : u'$ est absolument continue
u et $u'' \in L^2([o, +\infty[)$, $u(o) = o\}$

La transformation $\mathcal{F}$:

$$(\mathcal{F} f)(k) = \lim_{N \to \infty} \int_o^N \phi(k,s)\, f(s)ds \quad \text{avec} \quad \phi(k,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k\, s$$

définit une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur lui-même qui est son propre inverse. $\mathcal{F}^2 = I$. D'autre part, $\mathcal{F}$ diagonalise l'opérateur A_o^o , c'est-à-dire si E_o est la mesure spectrale attachée à A_o^o :

$$(E_o((a,b))f)(s) = \int_{a<k^2<b} \phi(k,s)\, (\mathcal{F} f)(k)\, dk \quad .$$

Pour démontrer ces résultats, il y a plusieurs méthodes. Celle qui consiste à travailler sur $\mathbb{R}$ tout entier, pour utiliser la transformation de Fourier avec le noyau e^{iks} , et les fonctions impaires. On peut aussi faire la démonstration directement. On y arrive dans les deux cas sans difficulté grâce à la simplicité du noyau et sa symétrie. On conçoit dès lors, que si $\phi(k,s)$ est donné par :

$$\phi(k,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(2\ell + n - 1)} e^{\frac{\Pi\alpha}{2k}} (2ks)^{\ell + \frac{n-1}{2}} e^{iks}\, {}_1F_1(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k}; 2\ell+n-1; -2iks)$$

la simplicité et la symétrie ont disparu et, par suite les calculs directs ne peuvent conduire au résultat.
On est donc ramené à des méthodes plus générales donc plus lourdes. On sait que si H est un opérateur autoadjoint et si a et b ne sont pas des valeurs propres, la mesure spectrale E est définie par :

$$E((a,b)) = \lim_{\varepsilon \to o} \int_a^b [R(\lambda - i\varepsilon) - R(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda$$

où $R(z) = (zI - H)^{-1}$; $\operatorname{Im} z \neq o$

Il nous faut d'abord exprimer l'opérateur $R(z)$: c'est l'objet du théorème 3.1 et ce n'est pas difficile. Nous utiliserons ensuite la technique développée par Dunford - Schwartz dans [15] que l'on doit à Weyl - Titschmarch - Kodaïra [20] , [49] .

Théorème 1.3

Soit A_α^ℓ l'extension autoadjointe associée à l'opérateur différentiel formel $\tau = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}$, $\mu = \ell + \frac{n-2}{2}$.

L'ensemble résolvant est égal à :

(i) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ si $\alpha \leq 0$

(ii) $\mathbb{C} \setminus \{ \mathbb{R}^+ \cup (\{\frac{-\alpha^2}{(\ell + \frac{n-1}{2} + p)^2}\}\ p \geq 0)$ si $n \geq 2$ et $\alpha > 0$

Pour $\lambda \in \rho(A_\alpha^\ell)$, $\lambda = k^2$, la résolvante $R(\lambda) = (\lambda I - A_\alpha^\ell)^{-1}$ est un opérateur intégral, dont le noyau $G(s,t,\lambda)$ est donné par :

Si $\operatorname{Im} \lambda > 0$: $G_\alpha^\ell(s,t,\lambda) = \mathcal{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-1}{2}}(-2ikr_<)\, W_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikr_>) \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{2ik\,\Gamma(2\ell+n-1)}$

avec $0 < \arg k \leq \frac{\pi}{2}$

Si $\operatorname{Im} \lambda > 0$: $G_\alpha^\ell(s,t,\lambda) = \mathcal{M}_{-\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(+2ikr_<)\, W_{-\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-1}{2}}(2ikr_>) \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{(-2ik)\Gamma(2\ell+n-1)}$

avec $-\pi/2 < \arg k < 0$

où : $r_< = \inf(s,t)$; $r_> = \sup(s,t)$

Les fonctions $\mathcal{M}$ et W sont considérées avec leur branche principale

$-\pi < \arg z < +\pi$.

Preuve :

La description de l'ensemble résolvant est une conséquence de l'étude faite en (1.1) et (1.2). Par ailleurs, si $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\lambda = k^2$ avec $\operatorname{Im} k > 0$,

la fonction $\phi(r) = W_{\frac{i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikr)$ est de carré intégrable à l'infini tandis que la fonction $\psi(r) = \mathcal{M}_{\frac{i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikr)$ est de carré intégrable à l'origine et satisfait aux conditions aux limites lorsqu'elles existent . Par suite, le théorème 3-16 [15] donne, dans ce cas, la description du noyau de la résolvante. Pour $\mathrm{Im}\ \lambda < o$, le théorème 3-16 s'applique avec les fonctions $\phi(r) = W_{-\frac{i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(2ikr)$ et $\psi(r) = \mathcal{M}_{-\frac{i\alpha}{k},\, \ell + \frac{n-2}{2}}(2ikr)$, sous la condition $\mathrm{Im}\ k < o$.

Pour parcourir l'ensemble résolvant il suffit de considérer

pour $\mathrm{Im}\ k > o$ $\quad o < \arg k \leq \frac{\Pi}{2}$

pour $\mathrm{Im}\ k < o$ $\quad -\frac{\Pi}{2} < \arg k < o$.

Par suite, à chaque fois $\mathcal{M}$ et W sont considérées dans leur branche principale : $-\Pi < \arg z < \Pi$.

Corollaire 1.2

Si $\alpha = o$, la résolvante $(k^2 I - A_o^{\ell})^{-1}$ a pour noyau :

Si $\mathrm{Im}\ \lambda > o$, $\mathrm{Im}\ k > o$:

$$G_o^{\ell}(k,s,t) = \frac{\Pi}{2i}(r_<)^{1/2}\, J_{\ell+\frac{n-2}{2}}(kr_<)\,(r_>)^{\frac{1}{2}}\, H^{(1)}_{\ell+\frac{n-2}{2}}(kr_>)$$

Si $\mathrm{Im}\ \lambda < o$, $\mathrm{Im}\ k < o$

$$G_o^{\ell}(k,s,t) = \frac{\Pi}{2i}(r_<)^{\frac{1}{2}}\, J_{\ell+\frac{n-2}{2}}(-kr_<)\,(r_>)^{\frac{1}{2}}\, H^{(1)}_{\ell+\frac{n-2}{2}}(-kr_>)$$

Preuve :

C'est une conséquence immédiate du théorème 1.3 si on tient compte des

relations existant entre fonctions de Whittaker et fonctions de Bessel .

Théorème 1.4

Soit A_α^ℓ l'extension autoadjointe associée à l'opérateur différentiel formel $\tau = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}$; soit E la mesure spectrale associée à cette extension et posons :

1) $$\phi(k,r) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{\left|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{k})\right|}{\Gamma(2\ell + n-1)} e^{\frac{\Pi\alpha}{2k}} (2kr)^{\ell + \frac{n-1}{2}} e^{\mp ikr} F(\ell + \frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{k}; 2\ell+n-1; \pm 2ik$$

Alors :

1°) la transformation $\mathcal{F}_\alpha$ définie par

2) $$(\mathcal{F}_\alpha f)(k) = \lim_{\substack{\varepsilon \to o \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N \phi(k,r)\, f(r)\, dr \qquad \text{(limite dans } L^2(\mathbb{R}_+))$$

réalise un isomorphisme isométrique de $E([o, +\infty[)\, L^2(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\mathbb{R}_+)$

2°) Pour toute fonction G définie sur la droite réelle et borélienne , nulle en dehors de $[o, +\infty[$, on a :

3) $$\mathcal{F}_\alpha\, D(G(A_\alpha^\ell)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+) : G(.)\, f(.) \in L^2(\mathbb{R}^+)\}$$

4) $$\mathcal{F}_\alpha (G(A_\alpha^\ell)\, f)(k) = G(k^2)\, (\mathcal{F}_\alpha f)(k)$$

en particulier , si $\tilde{A}_\alpha^\ell$ est la restriction de A_α^ℓ à $E([o, +\infty[)\, L^2(R^+)$

5) $$\mathcal{F}_\alpha (A_\alpha^\ell f)(k) = \mathcal{F}_\alpha (E([o, +\infty[)\, A_\alpha^\ell f)(k) = k^2 (\mathcal{F}_\alpha f)(k)$$

Si $\alpha \leq o$ nous savons que $A_\alpha^\ell = \tilde{A}_\alpha^\ell$.

3°) L'isomorphisme réciproque est défini de la même façon

(6) $(\mathcal{F}_\alpha)^{-1} f(r) = (\overline{\mathcal{F}}_\alpha f)(r) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N \phi(k,r) f(k)dk$ (limite dans $L^2(\mathbb{R}^+)$)

4°) Pour toute fonction G bornée borélienne, nulle en dehors de $e \subset \mathbb{R}_+$,

(7) $(G(A_\alpha^\ell) f)(r) = \int_0^{+\infty} f(s)\, ds \int_e G(k^2)\, \phi(k,s)\, \phi(k,r)\, dk$

(8) en particulier, si $]\lambda_1,\lambda_2[\subset \mathbb{R}^+$ $(E(]\lambda_1,\lambda_2[)f)(r) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \phi(r,k)\, (\mathcal{F}_\alpha f)(k)\, dk$.

Preuve : Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert du plan complexe défini par : $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| < |\operatorname{Re} z|$

Considérons la base :

$$\sigma_1(r,\lambda) = \mathcal{M}_{\frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}},\ \ell+\frac{n-1}{2}}(-2i\sqrt{\lambda}r)$$

$$\sigma_2(r,\lambda) = W_{-\frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}},\ \ell+\frac{n-2}{2}}(2i\sqrt{\lambda}r)$$

$\lambda \to \sqrt{\lambda}$ est analytique dans $\mathcal{U}$; comme l'image de $\mathcal{U}$ par cette application est contenue dans $\mathcal{U}$, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, amène cette image dans le domaine de la branche principale de $\mathcal{M}$ et W : $-\pi < \arg z < \pi$, où ces fonctions sont analytiques .

D'autre part, comme

$$\overline{W_{-\frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}},\ \ell+\frac{n-2}{2}}(2i\sqrt{\lambda}r)} = \overline{\sigma_2(r,\bar{\lambda})} = W_{\frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}},\ \ell+\frac{n-2}{2}}(-2i\sqrt{\bar{\lambda}}r)$$

nous pouvons écrire la résolvante :

$$K(t,s,\lambda) = \frac{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2}-\frac{i\alpha}{k})}{2ik\,\Gamma(2\ell+n-1)}\ \sigma_1(t,\lambda)\ \overline{\sigma_2(s,\bar{\lambda})} \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0 \quad t < s$$

Donc , d'après la terminologie du théorème 18 de [15], nous avons :

si $\operatorname{Im}\lambda > o$, $\theta^-_{1,2}(\lambda) = \dfrac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{(2ik)\ \Gamma(2\ell+n-1)}$ $\theta^-_{1,1}(\lambda) = \theta^-_{2,1}(\lambda) = \theta^-_{2,2}(\lambda) = o$

Mais nous avons aussi d'après [36] :

$$W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}\ e^{i\frac{\pi}{2}(2\ell+n-3)}\ W_{-\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(2ikr)$$

$$+ \frac{\Gamma(-(2\ell+n-2)}{\Gamma(\frac{1}{2} - (\ell+\frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k})}\ e^{i\frac{\pi}{2}(2\ell+n-1)}\left[1 - \frac{\cos\pi(\ell+\frac{n-2}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\cos\pi(\ell+\frac{n-2}{2}+\frac{i\alpha}{k})}\ e^{i\pi(2\ell+n-1)}\right] M_{-\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(2ik$$

Cette relation contient une indétermination que nous pouvons lever en tenant compte des relations :

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \text{et} \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}+z)\ \Gamma(\tfrac{1}{2}-z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$$

et nous trouvons alors, si $\lambda \in \mathcal{U}$:

$$W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}\ e^{i\frac{\pi}{2}(2\ell+n-3)}\ W_{-\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(2ikr)$$

$$+ \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(2\ell+n-1)}\ e^{\frac{\pi\alpha}{k}}\ M_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(2ikr)$$

Donc, si $\operatorname{Im} k < o$

$$,s,\lambda) = e^{-i\frac{\pi}{2}(2\ell+n-3)}\ \frac{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2}+\frac{i\alpha}{k})}{(-2ik)\ \Gamma(2\ell+n-1)}\ \sigma_1(t,\lambda)\ \sigma_2(t,\lambda) \text{ si } t < s$$

$$\sigma_2(s,\lambda) = \overline{W_{\frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2i\sqrt{\lambda}\, r)} = \frac{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2}+\frac{i\alpha}{k})}\ e^{-i\frac{\pi}{2}(2\ell+n-3)}\ W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+n-2}(-2ikr)$$

$$+ \frac{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(2\ell+n-1)}\ e^{\frac{\pi\alpha}{k}}\ M_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)$$

c'est-à-dire :

$$,s,\lambda) = e^{-i\Pi(2\ell + n-3)} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{(-2ik)\ \Gamma(2\ell+n-1)} \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikt)\ W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2iks)$$

$$+ \frac{|\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{k})|^2}{\Gamma(2\ell + n-1)^2}\ e^{\frac{\Pi\alpha}{k}} \frac{1}{-2ik} \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikt) \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2iks)\ e^{-i\frac{\Pi}{2}(2\ell + n-3)}$$

Donc, avec les notations du théorème 18, [15], si $\operatorname{Im}\lambda < o$, $k = \sqrt{\lambda}$

$$\theta^-_{1,2}(\lambda) = e^{-i\Pi(2\ell+n-3)} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{-2ik\ \Gamma(2\ell + n-1)}$$

$$\theta^-_{1,1}(\lambda) = \frac{1}{2ik}\ e^{-i\Pi(2\ell + n-1)} \frac{|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{k})|^2}{\Gamma(2\ell + n-1)^2}\ e^{\frac{\Pi\alpha}{k}}$$

car $\mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2iks) = e^{-\frac{i\Pi}{2}(2\ell+ n-1)} \mathfrak{M}_{-\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(2\ iks)$ $\operatorname{Im} k < o$

Nous avons donc : $\theta^-_{22}(\lambda) \equiv 0$, par suite, en tenant compte du théorème 23 [15], on peut appliquer le théorème 18 avec la seule fonction $\sigma_1(t,\lambda)$ et la mesure ρ_{11} définie par :

$$\lambda_1,\lambda_2[) = \lim_{\delta \to o}\ \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{2\Pi i} \int_{\lambda_1+\delta}^{\lambda_1-\delta} \frac{1}{2i\sqrt{\lambda-i\varepsilon}} \frac{e^{-i\Pi(2\ell+n-1)}}{(\Gamma(2\ell + n-1))^2}\ e^{\Pi\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda-i\varepsilon}}} |\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda-i\varepsilon}})|^2 d$$

La fonction sous le signe $\int$ n'a pas de singularité pour $\lambda \in \mathcal{U}$ par suite, si $\lambda_1 > 0$, nous obtenons :

$$]\lambda_1,\lambda_2[) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{4\Pi} \frac{e^{-i\Pi(2\ell+n-2)}}{\Gamma(2\ell + n-1)}\ e^{\Pi\frac{\alpha}{k}} |\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})|^2\ d\lambda$$

Pour tout $f \in L^2(R^+)$, posons

$$(Vf)(\lambda) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N \mathcal{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}} (-2ikr)\ f(r)\, dr \qquad (k = \sqrt{\lambda})$$

La limite existe dans $L^2(R^+, \rho_{11})$. Soit $E(R^+)$ le projecteur défini grâce à la mesure spectrale E de A_α^ℓ . Alors la transformation V définit un isomorphisme de $E(R^+)\ L^2(R^+)$ sur $L^2(R^+, \rho_{11})$. En effet :

$$||Vf||^2_{L^2(\rho)} = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{+\infty} |(Vf)(\lambda)|^2 \ \frac{\left|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{\sqrt{\lambda}})\right|^2}{(\Gamma(2\ell + n-1))^2} \ e^{\frac{\Pi\alpha}{\sqrt{\lambda}}} \ \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}} < +\infty$$

donc $Vf(\lambda) \in L^2(o, +\infty, \rho_{11})$

et en posant $\lambda = k^2$:

$$||Vf||^2_{L^2(\rho)} = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{+\infty} |(V f)(k^2)|^2 \ \frac{\left|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{k})\right|^2}{(\Gamma(2\ell + n-1))^2} \ e^{\frac{\Pi\alpha}{k}}\, dk = ||f||^2$$

donc Vf est un isomorphisme .

Posons pour $f \in L^2(o, +\infty)$:

$$(\mathcal{F}_\alpha f)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\left|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm \frac{i\alpha}{k})\right|}{\Gamma(2\ell + n - 1)} \ e^{\frac{\Pi\alpha}{2k}} \ (2kr)^{\ell + \frac{n-1}{2}} \ e^{\pm ikr}$$

$$F_{11}(\ell + \tfrac{n-1}{2} \mp \tfrac{i\alpha}{k} ;\ 2\ell+n-1 ;\ \mp 2ikr)\ f(r)\, dr$$

Ceci définit bien un isomorphisme de $E(R^+)\ L^2(o, +\infty)$ sur $L^2(o, +\infty)$ et la transformation réciproque est donnée par le même noyau. Cela dit, les diverses propriétés 2° 3° 4° sont des conséquences des Théorèmes 23 et 24 de [15] .

En particulier, on remarque que si $\alpha = o$, en tenant compte de :

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \quad \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2})\ \Gamma(\frac{1}{2} + \ell + \frac{n-1}{2})}{\Gamma(2\ell + n - 1)} \quad 2^{2\ell + n - \frac{3}{2}} = 1$$

la transformation $\mathcal{F}_o$ n'est autre que la transformation de Hankel dont le noyau est :

$$\phi(k,r) = (kr)^{\frac{1}{2}} \ J_{\ell + \frac{n-2}{2}}(kr)$$

Corollaire 1.3: Le spectre de A_α^ℓ est absolument continu dans $]o, +\infty[$

Preuve : c'est une conséquence immédiate de (8) (Théorème 1.4)

Corollaire 1.4: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ définissons :

$$\hat{f}(p) = < f \mid \phi_p > = \int_o^{+\infty} f(r)\ \phi_p(r)\ dr$$

1°) $\forall f \in L^2(\mathbb{R}_+) \quad g \in L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$f(r) = \lim_{\substack{\varepsilon \to o \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N \phi(k,r)\ (\mathcal{F}_\alpha f)\ (k)\ dk + \lim_{N \to \infty} \sum_{p=o}^{N} \hat{f}(p)\ \phi_p(r)$$

$$(f \mid g) = \int_o^{+\infty} (\mathcal{F}_\alpha f)\ (k)\ \overline{(\mathcal{F}_\alpha g)\ (k)}\ dk + \sum_{p=o}^{\infty} \hat{f}(p)\ \overline{\hat{g}(p)}$$

2°) $f \in D(A_\alpha^\ell) \iff k^2 (\mathcal{F}_\alpha f)\ (k) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et $\sum_{p=o}^{\infty} \lambda_p^2 \ |\hat{f}(p)| < +\infty$

$$\text{et } (A_\alpha^\ell f)\ (r) = \lim_{\substack{\varepsilon \to o \\ N \to \infty}} \int_\varepsilon^N k^2 \phi(k,r)\ (\mathcal{F}_\alpha f)(k) + \lim_{N \to \infty} \sum_{p=o}^{N} \lambda_p\ \hat{f}(p)\ \phi_p(r)$$

Preuve : c'est une conséquence des théorèmes 1.3 et 1.4 et des relations classiques concernant la décomposition spectrale d'un opérateur autoadjoint.

§. 2 Définition et étude spectrale de l'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$

2.1 L'opérateur H_α, somme directe des opérateurs A_α^ℓ

Désignons par S_{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Notons ses éléments : $\xi = (\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-2}, \phi) = (\theta, \phi)$.

Soit $P_\ell(x)$ un polynôme homogène de degré ℓ dans $\mathbb{R}^n$; P_ℓ est harmonique si :

$$\Delta P_\ell(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) P_\ell(x) = 0$$

La fonction $H_\ell(\xi)$ définie par :

$H_\ell(\xi) = r^{-\ell} P_\ell(r\,\xi)$, où P_ℓ est un polynôme homogène de degré ℓ et harmonique est appelée harmonique sphérique.

L'espace vectoriel $\mathcal{H}(\ell,n)$ des harmoniques sphériques de degré ℓ dans $\mathbb{R}^n$, est de dimension finie $h(\ell,n)$:

$$h(\ell,n) = (2\ell + n-2)\,\frac{(\ell + n-3)!}{(n-2)!\;\ell!} \quad \text{si} \quad n \geq 2 \quad \ell \geq 1$$

$$= 1 \quad \text{si} \quad \ell = 0$$

Munissons $L^2(S_{n-1})$ du produit scalaire :

$$(\phi \mid \psi) = \int_{S_{n-1}} \phi(\xi)\ \overline{\psi(\xi)}\ d\omega(\xi) \quad ,$$

Pour $\ell \neq \ell'$ les harmoniques sphériques de degré ℓ et ℓ' sont orthogonaux.

Désignons par $Y_{\ell,m}(\xi) = Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ une base orthonormale dans $\mathcal{H}(\ell,n)$, $1 \leq m \leq h(\ell,n)$; nous avons :

$$\sum_{m=1}^{h(\ell,n)} Y_{\ell,m}(\xi)\ \overline{Y_{\ell,m}(\eta)} = \frac{2\ell + n-2}{(n-2)\ \omega_n}\ C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)$$

où $\cos\theta = \langle \xi \mid \eta \rangle$

Nous savons que : $\Delta^{*}_{\theta,\phi}$, l'opérateur de Laplace Beltrami sur S_{n-1}

$$(2.1) \qquad \Delta^{*}_{\theta,\phi} = r^2 \left(\Delta_{r,\theta,\phi} - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\right)$$

est autoadjoint dans $L^2(S_{n-1})$, que son spectre est discret et est égal à $\{-\ell(\ell + n-2)\}_{\ell=o,1,\ldots}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-\ell(\ell + n-2)$ n'est autre que $\mathcal{H}(\ell,n)$.

Donc :

$$\Delta^{*}_{\theta,\phi} \; Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\ell(\ell + n-2)\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \qquad \forall m \quad 1 \leq m \leq h(\ell,n)$$

De sorte que :

$$\forall f \in L^2(S_{n-1}),\ f(\xi) = \sum_{\ell,m} (f \mid Y_{\ell,m})_{S_{n-1}} Y_{\ell,m}(\xi) \qquad \text{(convergence dans } L^2(S_{n-1}))$$

$$||f||^2_{L^2(S_{n-1})} = \sum_{\ell,m} |(f \mid Y_{\ell,m})|^2$$

Il en résulte que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall r > o \quad , \quad (\xi \longrightarrow f(r\,\xi)) \in L^2(S_{n-1})$$

Donc :

$$f(r\,\xi) = \sum_{\ell,m} (f(r\,.) \mid Y_{\ell,m}(.))\, Y_{\ell,m}(\xi)$$

$$= r^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} r^{\frac{n-1}{2}} (f(r\,.) \mid Y_{\ell,m}(.))\, Y_{\ell,m}(\xi))$$

avec $\sum_{\ell,m} |(f(r\,.) \mid Y_{\ell,m}(.))|^2 = ||f(r)||^2_{L^2(S_{n-1})}$

Posons : $f_{\ell,m}(r) = r^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_{n-1}} f(r\,\xi)\ \overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\ d\omega(\xi)$

Alors :

$$\int_o^{+\infty} |f_{\ell,m}(r)|^2\, dr = \int_o^{+\infty} r^{n-1} \left| \int_{S_{n-1}} f(r\,\xi)\ \overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\ d\omega(\xi) \right|^2 dr$$

$$\leq ||f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{car} \quad ||Y_m^\ell||_{L^2(S_{n-1})} = 1$$

donc : $f_{\ell,m} \in L^2(o, +\infty)$.

en conclusion : tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de façon unique :

$$f(r\,\xi) = r^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} f_{\ell,m}(r)\ Y_{\ell,m}(\xi)$$

avec :

$$||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{\ell,m} ||f_{\ell,m}||^2_{L^2(\mathbb{R}_+)}$$

Nous pouvons symboliser ceci par :

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_o^\infty r^{-\frac{n-1}{2}}\ L^2(o, +\infty) \otimes \mathcal{H}(\ell,n) = \bigoplus_{\ell=o}^\infty E_\ell \ .$$

E_ℓ est muni du produit scalaire induit par $L^2(\mathbb{R}^n)$

Définissons alors sur E_ℓ , l'opérateur B_α^ℓ par :

$$B_\alpha^\ell\ (r^{-\frac{n-1}{2}}\ \phi(.)\ Y_{\ell,m}(.,.))\ (r,\theta,\phi) = r^{-\frac{n-1}{2}}\ (A_\alpha^\ell\ \phi)\ (r)\ Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

remarquons que :

$$< B_\alpha^\ell\ u \mid v >_{E_\ell} = < A_\alpha^\ell\ u_\ell \mid v_\ell >_{L^2}$$

Donc B_α^ℓ est autoadjoint sur $D(B_\alpha^\ell) = r^{-\frac{n-1}{2}} D(A_\alpha^\ell) \otimes \mathcal{H}(\ell,n)$.

Désignons par $\tilde{H}_\alpha$ la somme hilbertienne des opérateurs B_α^ℓ ; par définition :

$$D(\tilde{H}_\alpha) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : f_{\ell,m} \in D(A_\alpha^\ell) \quad \forall \ell,m\}$$

$$\sum_{\ell,m} ||A_\alpha^\ell f_{\ell m}||^2 < +\infty$$

$$(\tilde{H}_\alpha f)(r\xi) = r^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} (A_\alpha^\ell f_{\ell m})(r) Y_{\ell,m}(\xi)$$

Nous allons montrer que cette définition coïncide avec celle obtenue avec des méthodes plus directes . De façon précise :

Proposition 1.2 :

Soit $p(x)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$ mesurable et satisfaisant :

(i) $$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{|x|<1} |p(x-y)|^2 |x|^{\beta-n} dx < +\infty$$ (pour au moins un β : $0 < \beta < 4$)

(ii) $$\lim_{|y| \to \infty} \int_{|x-y|<1} |p(x)|^2 dx = 0$$

Alors, l'opérateur V défini dans $H^2(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par :

$$(Vu)(x) = p(x)\, u(x)$$

est un opérateur compact .

Preuve :

Les conditions (i) et (ii) sont dites de Stummel . On trouve une démonstration de ce résultat par exemple dans [45] .

Corollaire 1.5 :

L'opérateur H_α défini pour $n \geq 3$ par :

$$D(H_\alpha) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

$$H_\alpha u = -\Delta u - \frac{2\alpha}{|x|} u(x)$$

est un opérateur autoadjoint dont le spectre essentiel est égal à $[0, +\infty[$.

Preuve :

Il suffit de montrer que $\frac{2\alpha}{|x|}$ satisfait (i) et (ii). Pour $n = 3$ c'est évident avec $\beta = 3$. Pour $n \geq 4$, nous utilisons l'inégalité de Hölder .

Remarque :

Si $n = 2$, $\frac{1}{|x|}$ n'étant pas dans L^2_{loc} , ne permet pas de définir H_α sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$; mais il est possible d'en donner une définition par une forme sesquilinéaire .

Proposition 1.3 : Si $n \geq 3$ $\tilde{H}_\alpha = H_\alpha$

Preuve :

D'après la théorie des sommes hilbertiennes d'opérateurs ([13]) $\tilde{H}_\alpha$ est un opérateur autoadjoint .

Comme H_α l'est aussi , il suffit de montrer par exemple que : $H_\alpha \subset \tilde{H}_\alpha$. Comme $\tilde{H}_\alpha$ est fermé et que H_α est la fermeture de sa restriction à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que cette restriction est contenue dans H_α ; c'est-à-dire que : $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \phi \in D(\tilde{H}_\alpha)$

et $H_\alpha \phi = \tilde{H}_\alpha \phi$.

Soit $\phi_{\ell,m} = r^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_{n-1}} \phi(r\,\xi)\,\overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\,d\omega(\xi) = r^{\frac{n-1}{2}}\,\psi_{\ell,m}$.

D'une part, nous avons : $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \phi_{\ell,m} \in \mathcal{E}([0, +\infty[)$.

D'autre part ,

$$(A_\alpha^\ell\ \phi_{\ell,m})(r) = (-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{2\alpha}{r})\ \phi_{\ell,m}(r)$$

$$= r^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_{n-1}} (-\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{n-1}{r}\ \frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{2\alpha}{r}\,\phi)\ Y_{\ell,m}(\xi)\,d\omega(\xi)$$

$$+ r^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_{n-1}} \frac{\ell(\ell+n-2)}{r^2}\,\phi(r,\xi)\,\overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\ d\omega(\xi)$$

En tenant compte de 2.1 et du fait que $\Delta^*_{\theta,\phi}$ est symétrique :

$$\int_{S_{n-1}} \frac{\ell(\ell+n-2)}{r^2}\,\phi(r,\xi)\,\overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\,d\omega(\xi) = \frac{1}{r^2} \int_{S_{n-1}} \phi(r,\xi)\,(-\Delta^*_{\theta,\phi}\,\overline{Y_{\ell,m}(\xi)})\,d\omega(\xi)$$

$$= \frac{1}{r^2} \int_{S_{n-1}} (-\Delta_{\theta,\phi}\,\phi(r,\xi))\,\overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\,d\omega(\xi)$$

D'où :

$$(A_\alpha^\ell\,\phi_{\ell,m})(r) = r^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_{n-1}} -(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta^*_{\theta,\phi}\,\phi(r,\xi) - \frac{2\alpha}{r}\,\phi)\,\overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\,d\omega(\xi)$$

$$= r^{\frac{n-1}{2}} \int_{S_{n-1}} (-\Delta - \frac{2\alpha}{r})\,\phi)\,(r\,\xi)\ \overline{Y_{\ell,m}(\xi)}\,d\omega(\xi)$$

Comme $(-\Delta - \frac{2\alpha}{r})\,\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il est clair que $A_\alpha^\ell\,\phi_{\ell,m} \in L^2(\mathbb{R}^+)$

et

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{r})\ \phi(r,\xi) = r^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} (A_\alpha^\ell\ \phi_{\ell,m})\ (r)\ Y_{\ell,m}\ (\xi) = \widetilde{H}_\alpha \phi \quad .$$

Enfin , il est évident que pour $n = 3$ $\phi_{\ell,m}(o) = o$; ceci achève la démonstration .

Remarque :

Pour $n = 2$, nous adopterons désormais la notation H_α au lieu de $\widetilde{H}_\alpha$ pour unifier l'écriture .

2.2 - Spectre ponctuel et fonctions propres :

Théorème 1.5

Si $n \geq 2$ et $\alpha > 0$, le spectre ponctuel de H_α est constitué par une suite de valeurs propres (λ_k) tendant vers 0 :

$$\lambda_k = -\frac{\alpha^2}{(\frac{n-1}{2} + k)^2} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

de multiplicité égale à $\sum_{\ell=0}^{k} h(\ell,n)$.

Une base orthonormale du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est donnée par les fonctions : $\phi^k_{\ell,m}$

$$\phi^k_{\ell,m}(r\,\xi) = \left(\frac{2\alpha}{\frac{n-1}{2} + k}\right)^{\ell + \frac{n-1}{2}} \left(\frac{\alpha(k-\ell)!}{\Gamma(k + \ell + n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$r^{\ell}\, e^{-\frac{2\alpha r}{(k + \frac{n-1}{2})}}\, L^{\ell}_{k}\left(\frac{2\alpha r}{k + \frac{n-1}{2}}\right) Y^{\ell}_{m}(\xi)$$

où $h(\ell,n) = (2\ell + n-2)\,\frac{(\ell + n-3)!}{(n-2)!\,\ell!}$

par $\alpha \leq 0$, $\sigma_p(H_\alpha) = \phi$.

Preuve :

D'après la définition (pour $n = 2$) et d'après la proposition 1.3 : $u \in D(H_\alpha)$ et $H_\alpha u = \lambda u_\alpha$ si et seulement si $u_{\ell,m} \in D(A^{\ell}_{\alpha})$ et $A^{\ell}_{\alpha}(u_{\ell,m}) = \lambda\, u_{\ell,m}$.

D'après l'étude faite en 1.2, à chaque fois que $u_{\ell,m} \not\equiv 0$;

$$\lambda = \frac{-\alpha^2}{(\ell + p + \frac{n-1}{2})^2}$$

Comme $u \not\equiv o$, il existe au moins ℓ_o tel que $u_{\ell_o,m} \not\equiv o$ donc λ peut être n'importe quelle valeur du type :

$$\lambda = - \frac{\alpha^2}{(\ell_o + p + \frac{n-1}{2})^2} \qquad p = o, 1, 2 \ldots$$

Fixons p et posons $\ell_o + p = k$ $\left(\lambda_k = - \frac{\alpha^2}{(k + \frac{n-1}{2})^2} \right)$:

il n'existe qu'un nombre fini de couples (ℓ,p) tels que $\ell + p = k$. Donc nécessairement $\ell > k$, $u_{\ell,m} \equiv o$ et nous avons :

$$u_{\ell,m}(r) = \gamma_{\ell,m} \; \phi_p^{\ell}(r)$$

$$u(r , \xi) = r^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell \leq k} \gamma_{\ell,m} \; \phi_{k-\ell}^{\ell}(r) \; Y_{m,\ell}(\xi) \quad .$$

Pour ℓ fixé , dim $\mathcal{H}(\ell,n) = h(\ell,n)$. Il est alors clair que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est égale à

$$\sum_{\ell \leq k} h(\ell,n) \quad .$$

la fonction $r^{-\frac{n-1}{2}} \phi_{k-\ell}^{\ell} \; Y_{\ell,m}$ est normalisée dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ car $\phi_{k-\ell}^{\ell}$ et $Y_{\ell,m}$ le sont respectivement dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et $L^2(S_{n-1})$

.3 - Fonctions propres généralisées de l'opérateur H_α et développement en fonctions propres :

Proposition 1.3

Considérons les fonctions définies (formellement) par les séries :

$$n > 2 \; : \; \Phi_n^-(x,k) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \quad \frac{(ixk)}{n-2}^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+n-2) \; C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta) \; \phi_{2\ell+n-2}^-(x,k$$

$$n = 2 : \phi_2^-(x,k) = \frac{1}{2\pi} (xk)^{-\frac{1}{2}} \{\phi_o^-(k,x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} 2 \cos \ell\theta \ \phi_{2\ell}^-(x,k)\}$$

où $x = |\vec{x}|$; $k = |\vec{k}|$; $\cos\theta = \frac{\vec{x}.\vec{k}}{xk}$; C_ℓ^ν est un polynôme de Gegenbauer [36]

et : $$\phi_{2\ell+n-2}^-(x,k) = \frac{e^{\Pi \frac{\alpha}{2k}}}{\sqrt{2\pi}} \quad \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(2\ell + n - 1)} \ \mathcal{M}_{-\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(2ikx) \quad \forall \ell \geq o \ \forall n >$$

Alors :

(1) Chaque série converge absolument, ainsi que ses dérivées par rapport à x, k et cos θ (uniformément par rapport à cos θ et par rapport à tout x et k dans un compact de R_+^*)

(2) $\forall n \geq 2$:

$$\phi_{n+2}^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi i xk)} \quad \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} \quad \phi_n^-(\vec{x},\vec{k})$$

(3) $$\phi_n^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{e^{\frac{\pi\alpha}{2k}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \quad \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \ e^{i(\vec{x}|\vec{k})} \ F_{11}(\frac{i\alpha}{k}; \frac{n-1}{2}; i(kx - \vec{k}|\vec{x}))$$

Preuve : Rappelons tout d'abord les relations [(36) 5.3], sur lesquelles nous nous appuyons .

(2.2) $$\frac{d}{d(\cos\theta)} \ C_\ell^\lambda(\cos\theta) = 2\lambda \ C_{\ell-1}^{\lambda+1}(\cos\theta)$$

(2.3) $$\sup_\theta |C_p^\lambda(\cos\theta)| \leq \binom{p+2\lambda-1}{p}$$

(2.4) $$F_{11}(a;c;z) = 2 \ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \ e^z \ z^{\frac{1-c}{2}} \int_o^{+\infty} e^{-t^2} \ t^{c-2a} \ J_{c-1}(2t\sqrt{z}) \ dt \ .$$

$\mathcal{R}ec > \mathcal{R}e \ a > o$, $\mathcal{R}e \ z > o$

(2.5) $$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_o^{\pi} e^{z\cos\phi} \ \cos n\phi \ d\phi \ .$$

$$\begin{cases} J_{2\ell+1}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin\phi) \sin(2\ell+1)\phi \, d\phi \, . \\ J_{2\ell}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin\phi) \cos(2\ell)\phi \, d\phi \, . \end{cases}$$

7) $$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\pi^{1/2}\,\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^1 (1 - t^2)^{\nu-1/2} \cos z\, t \, dt \quad \mathcal{R}e\ \nu > -1/2 \, .$$

Introduisons les notations suivantes :

$$C^+ = \{k \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\, k \geq o\} \ ; \ C_\alpha^+ = \{k \in C^+ : \mathcal{R}\,(\tfrac{n-1}{2} - i\alpha/k) > o\}$$

.8)

$$C_p^+ = \{k \in C^+ \ : \ k \notin \{o, \frac{-i\alpha}{(\frac{n-1}{2} + p)}\}\} \quad p = o, 1, 2, \ldots\}$$

Observons que si $\alpha \leq o$, $C^+ = C_\alpha^+$. D'autre part la fonction :

.9) $$\phi^-_{2\ell+n-2}(x,k) = \frac{e^{\pi\alpha/2k}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - i\alpha/k)}{\Gamma(2\ell + n - 1)} e^{-ikx}(2ikx)^{\ell + \frac{n-1}{2}} {}_1F_1(\ell + \frac{n-1}{2} - i\alpha/k; 2\ell+n-1; 2ik$$

est analytique, par rapport à la variable k, dans $\overset{\circ}{C}{}_p^+$, et continue dans C_p^+ .

Considérons la série :

.10) $$e^{-ikx} \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell + n-2) \, C_\ell^{\frac{n-2}{2}} (\cos\theta) \, \phi^-_{2\ell+n-2}(x,k)$$

En tenant compte à la fois de (2.9) et (2.3), et en posant $z = 2iks$, cette expression devient :

.11) $$2e^{z/2} (z)^{1/2} \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell + n-2) \, C_\ell^{\frac{n-2}{2}} (\cos\theta) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{-2i\alpha/k} J_{2\ell+n-2}(2t\sqrt{z}) \, dt$$

En tenant compte de la relation (2.2), la convergence de cette série, et de la série des dérivées par rapport à $\cos\theta$, revient à considérer la convergence des séries du type :

$$(2.12)\quad \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell + n-2)\, C^{q}_{\ell+p}(\cos\theta) \int_{o}^{+\infty} e^{-t^2}\, t^{-2i\alpha/k}\, J_{2\ell+n-2}(2t\sqrt{z})\, dt\ .$$

où p et q sont des entiers positifs arbitraires mais fixes :
Partageons l'intégrale en deux : considérons d'abord :

$$(2.13)\quad \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell + n-2)\ C^{q}_{\ell+p}(\cos\theta) \int_{o}^{1} e^{-t^2}\, t^{-2i\alpha/k}\, J_{2\ell+n-2}(2t\sqrt{z})\, dt$$

On a : [52]

$$(2.14)\quad |J_{2\ell+n-2}(2t\sqrt{z})| \leq \frac{4t^{2\ell}|z|^{\ell}}{(2\ell+n-2)!}\ e^{4\,t^2|z|}$$

La série (2.13) admet comme série numérique majorante, convergente :

$$(2.15)\quad C \sum_{\ell=o}^{\infty} \frac{(2\ell + n-2)}{(2\ell + n-2)!} \binom{p + 2q - 1 + \ell}{p + \ell} < +\infty$$

où C est une fonction finie de α, k, x, bornée lorsque k et x sont dans des compacts de C^{+}_{α} et $]o, +\infty[$ respectivement .

Pour le deuxième morceau de l'intégrale , nous ferons un certain nombre d'intégrations par parties . De (2.5), on déduit

$$J_p(z) = \frac{(-i)^t}{\Pi}\ \frac{(-1)^N}{p^N} \int_{o}^{\Pi} (e^{z\cos\phi})^{(N)}\ \cos(p\phi + \tfrac{N\Pi}{2})\, d\phi\ .$$

Choisissons l'entier N_o tq .

$$(2.16)\quad \sum_{\ell=o}^{\infty} \frac{1}{(2\ell + n-2)^{N_o-1}} \binom{p + 2q - 1 + \ell}{p + \ell} < +\infty$$

Il est alors immédiat que la série

$$(2.17)\quad \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+n-2)\ C^{q}_{\ell+p}(\cos\theta) \int_{1}^{\infty} e^{-t^2}\, t^{-2i\alpha/k}\, J_{2\ell+n-2}(2t\sqrt{z})\, dt\ .$$

admet une série numérique majorante du type (2.16, lorsque k, et x sont dans des compacts de C^{+} , et R^{*}_{+} , respectivement .

Désignons par $\phi^-(x, k, \cos\theta) = \phi^-(\vec{x},\vec{k})$, la somme de la série . En tant que fonction de la variable k(x, $\cos\theta$ fixés), cette fonction est analytique dans C_p^+ . Pour calculer explicitement ϕ^- , nous supposerons que $k \in C_\alpha^+$.

Nous allons d'abord établir une relation de récurrence .

Supposons $n \geq 4$. On a, en reprenant l'énoncé de la proposition 2.4 et en tenant compte de (2.4) :

$$(2.18)\quad \phi_n^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \frac{(ixk)}{n-2}^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+n-2)\, C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\, \phi^-_{2\ell+n-2}(x,k) ,$$

$$\phi^-_{2\ell+n-2}(x,k) = \frac{e^{\pi\alpha/2k}}{\sqrt{2\pi}}\, 2\, e^{ikx}(2ikx)^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, t^{-2i\alpha/k} J_{2\ell+n-2}(2t(2ikx)^{1/2})d$$

Grâce à 2.2 et au fait que $C_o^\lambda(\cos\theta) \equiv 1$, on a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+n-2)\, C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\, \phi^-_{2\ell+n-2}(x,k) = \frac{1}{n-4} \frac{d}{d(\cos\theta)} \sum_{\ell=1}^{\infty}(2\ell+n-2)\, C_{\ell+1}^{\frac{n-4}{2}}(\cos\theta)\, \phi^-_{2\ell+n-2}(x,$$

Par suite , si on pose $\ell+1 = p$, on a :

$$(2.19)\qquad \phi_n^-(\vec{x},\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi ixk}\right) \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)}\, \phi^-_{n-2}(\vec{x},\vec{k}) .$$

Examinons les cas $n = 2$, et $n = 4$. On a

$$\phi_4^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{(ixk)^{-3/2}}{4\pi^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+2)\, C_\ell^1(\cos\theta)\, \phi^-_{2\ell+2}(x,k)$$

$$(2.20)\qquad \phi_2^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{(ikx)^{-1/2}}{2\pi} \{\phi_o^-(x,k) + \sum_{\ell=1}^{\infty} 2\cos(\ell\theta)\, \phi^-_{2\ell}(x,k)$$

Il devient alors clair qu'en dérivant par rapport à $\cos\theta$, dans la deuxième série, et en tenant compte de la relation :

$$\frac{d}{d(\cos\theta)} \cos\ell\theta = \ell \frac{\sin\ell\theta}{\sin\theta} = \ell\, C_{\ell-1}^1(\cos\theta)$$

on a encore la même relation 2.19 qui lie Φ_4^- et Φ_2^- . Nous allons donc trouver l'expression simple de $\Phi_2^-(\vec{x},\vec{k})$ et $\Phi_3^-(\vec{x},\vec{k})$.

En utilisant les représentations 2.6 et 2.7 , on a :

$$\Phi_2^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{2\, e^{\Pi a/2k}}{\Pi^{5/2}}\, e^{ikx} \int_o^{+\infty} e^{-t^2} t^{-2ia/k} \left\{ \iint_o^{\Pi/2} \cos(z \sin\phi) \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} 2\cos\ell\theta \cos 2\ell\phi\right] d\phi \right\} dt$$

$$\Phi_3^-(\vec{x},\vec{k}) = \frac{(ikx)^{-1/2}}{\Pi^{5/2}}\, e^{\Pi a/2k}\, e^{ikx} \left(\int_o^{+\infty} e^{-t^2} t^{-2ia/k} \left\{ \iint_o^{\Pi} \sin(z\sin\phi) \left[\sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+1) \rho_\ell(\cos\theta) \sin(2\ell+1)\phi \right] d\phi \right\} dt \right.$$

Après intégrations par parties, et tenant compte de; [36]

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{\ell=o}^{N} \rho_\ell(\cos\theta) \cos(2\ell+1)\phi = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2(\cos 2\phi - \cos\theta)}} & o \leq 2\phi < \theta < \Pi \\ o & o < \theta < 2\phi < \Pi \end{cases}$$

$$\lim_{N \to \infty} - \sum_{\ell=o}^{N} \frac{\cos\ell\theta \sin 2\ell\theta}{\ell} = -\frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\sin\ell(\theta+2\phi) + \sin\ell(2\phi-\theta)}{\ell} \begin{cases} \phi - \Pi/2 & o<\theta \\ \phi & o<2\phi<\theta< \end{cases}$$

on peut, après avoir justifié l'application du théorème de Lebesgue, que :

$$\Phi_2^-(\vec{x},\vec{k}) = C_2(a,k,x)\, \frac{\Pi}{2} \int_o^{+\infty} e^{-t^2}\, t^{-2ia/k} \cos(2t(\sqrt{+2ikx})\, \sin\theta/2)\, dt$$

$$= \frac{e^{\Pi a/2k}}{2\Pi}\, \frac{\Gamma(1/2 - ia/k)}{\Gamma(1/2)}\, e^{i(\vec{k}|\vec{x})}\, {}_1F_1(ia/k\ ;\ 1/2;\ i(kx - \vec{k}|\vec{x}))$$

$$\Phi_3^-(\vec{x},\vec{k}) = C_3(a,k,x) \int_e^{+\infty} e^{-t}\, {}^{2ia/k} \left(\int_o^{\theta/2} \frac{\cos(z \sin\phi)}{\sqrt{2(\cos 2\phi - \cos\theta)}}\ z \cos\phi\, d\phi \right) dt$$

$$= \frac{e^{\Pi a/2k}}{(2\Pi)^{3/2}}\, \Gamma(1 - ia/k)\, e^{i(\vec{k}|\vec{x})}\, {}_1F_1(+\ ia/k\ ;\ 1\ ;\ i(kx - \vec{k}|\vec{x}))$$

Grâce à la relation de récurrence 2.19, on obtient les résultats annoncés pour $\Phi_n^-(\vec{x},\vec{k})$

Théorème 1.6

Considérons les fonctions :

$$\Phi^{-}(\vec{k},\vec{x}) = \frac{e^{\pi\alpha/2k}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2} - i\alpha/k)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} e^{i(\vec{x}|\vec{k})} F_{11}(+ i\alpha/k ; \frac{n-1}{2} ; i(kx - (\vec{x}|\vec{k})))$$

$$\Phi^{+}(\vec{k},\vec{x}) = \overline{\Phi^{-}(-\vec{k},\vec{x})} \quad \text{où} \quad k = |\vec{k}|, \quad x = |\vec{x}|, \quad (\vec{k},\vec{x}) \in R^n \times R^n \quad n \geq 2$$

Définissons, dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, les transformations

$$\mathcal{F}_\alpha^{\mp} f)(\vec{k}) = \int_{R^n} \overline{\Phi^{\mp}(\vec{k},\vec{x})}\, f(\vec{x})\, dx \qquad (1)$$

Nous avons alors

(i) $(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|})\, \Phi^{\mp}(\vec{k},\vec{x}) = k^2\, \Phi^{\mp}(\vec{k},\vec{x})$, $\vec{x} \neq o$, $\vec{k} \neq o$

(ii) $\mathcal{F}_\alpha^{\mp}$, définis par (1) dans $\mathcal{D}(R^n - \{o\})$ s'étendent à $L^2(\mathbb{R}^n)$ en des opérateurs partiellement isométriques.

(iii) $\mathcal{F}_\alpha^{\mp}(D(H_\alpha)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : k^2(\mathcal{F}_\alpha^{\mp} f)(\vec{k}) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

$$f \in D(\bar{H}_\alpha) \Rightarrow \mathcal{F}_\alpha(\bar{H}_\alpha f)(\vec{k}) = |\vec{k}|^2 (\mathcal{F}_\alpha^{\pm} f)(\vec{k})$$

où $\bar{H}_\alpha = E_\alpha([o, +\infty[)\, H_\alpha$.

Si α est $\leq o$, $\mathcal{F}_\alpha^{\pm}$ sont des opérateurs unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}$

Si α est $> o$ $\mathcal{F}^{\pm}$ " " de $E_\alpha(R^+)L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}$

Preuve :

(i) Fixons $\vec{k} \neq o$, et choisissons comme repère $(\vec{j}_1, \vec{j}_2, \ldots, \vec{j}_n)$ avec $\vec{j}_1$

colinéaire à $\vec{k}$. Dans ce repère, l'opérateur $-\Delta - \frac{2\alpha}{x} - k^2$ exprimé en coordonnées sphériques, est donné par

$$-\frac{1}{x^{n-1}}\ \frac{\partial}{\partial x}\ (x^{n-1}\ \frac{\partial}{\partial x}) - \frac{1}{x^2\ (\sin\theta)^{n-2}}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ ((\sin\theta)^{n-2}\ \frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{2\alpha}{x} - k^2$$

où $\theta = (\vec{k},\vec{x})$ puisqu'il s'applique à $\Phi(\vec{x},\vec{k})$ qui ne dépend que de k, x, θ. On a :

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{x} - k^2)\ \Phi^-(\vec{k},\vec{x}) = \text{cste}\ e^{-i(\vec{k}|\vec{x})}\ \{z\ F''(z) + (\frac{n-1}{2} - z)\ F'(z) + (i\alpha/k - \frac{n-1}{2})\ F\}$$

où $z = i(kx - (\vec{k}|\vec{x}))$, or le crochet nul puisque $F(i\alpha/k\ ;\ \frac{n-1}{2}\ ;\ z)$ est solution de l'équation hypergéométrique confluente [36].

Donc $\Phi^-(\vec{k},\vec{x})$ apparaissent comme des fonctions propres généralisées de H_α .

(ii) Soit $f(x) = \sum_{\ell,m} x^{-\frac{n-1}{2}}\ f_{\ell m}(x)\ Y_{\ell,m}(\xi)$

où $f_{\ell,m} \in \mathcal{D}(R_+)$, égaux à 0 sauf pour un nombre fini d'indices ℓ,m . De telles fonctions sont denses dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Alors

$$(\mathcal{F}_\alpha^- f)\ (\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi^-(\vec{x},\vec{k})}\ f(\vec{x})dx = \sum_{\ell,m} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{n-1}{2}}\ x^{n-1} f_{\ell m}(x) \int_{S^{n-1}} Y_{\ell,m}(\frac{\vec{x}}{x})\ \overline{\Phi}(\vec{x},\vec{k})\ dx$$

D'après la proposition 2.4 , on a :

$$\Phi^-(\vec{x},\vec{k}) = (ixk)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} Y_m^\ell\ (\frac{\vec{x}}{x})\ Y_m^\ell\ (\frac{\vec{k}}{k})\ \phi^-_{2\ell+n-2}\ (x,k)$$

De sorte qu'on a

$$(\mathcal{F}_\alpha^- f)(\vec{k}) = k^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} \int_0^{+\infty} i^{-\frac{n-1}{2}} \phi^-_{2\ell+n-2}(x,k)\, f_{\ell,m}(x)\, dx$$

L'intégrale n'est autre que la transformée de Fourier généralisée associée à A_α^ℓ qui définit un opérateur partiellement isométrique . $\mathcal{F}_\alpha^-$ n'est autre que la somme hilbertienne de cette famille d'opérateurs partiellement isométriques. Les autres propriétés découlent de cette même considération.

2.4- Solution fondamentale sortante de $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} - k^2$

Soit $A(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients réels, formellement autoadjoint. On appelle solution fondamentale de l'équation $A(x,D)\,u = o$, toute fonction $G(x,y)$ qui soit un noyau de Lévi (cf [39]) , satisfaisant

$$(2.21)\quad A(x,D)\,G(x,y) = o \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n - \{y\} \;;\; G(x,y) = G(y,x)$$

Considérons l'opérateur $A(x,D) - k^2$, ou k est un nombre complexe et $G(k,x,y)$ une solution dondamentale.
Supposons qu'il existe une fonction définie, et continue au voisinage du demi axe réel positif : $k \longrightarrow \omega(k) \geq o$, telle que l'on ait

$$G(k,x,y) = O\left(e^{\pm\omega(k)|y|}\, |y|^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

(2.22)

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_A} - ik\,G = o\left(e^{\pm\,\omega(k)|y|}\, |y|^{\frac{n-1}{2}}\right) \quad , \quad x \text{ fixé} \;,\; |y| \to \infty$$

$\pm$ suivant que $\operatorname{Im} k \gtrless o$, $\frac{\partial}{\partial \nu_A}$ désigne la dérivée suivant la conormale au point y sur la sphère passant par y , centrée en O .

Si $G(k,x,y)$ est un noyau de Lévi satisfaisant 2.21-2.22, on dira que $G(k,x,y)$ est une solution fondamentale sortante. L'exemple type est

donné par $A(x,D) - k^2 = -\Delta - k^2$, et

$$G(k,x,y) = \frac{i}{4} \left(\frac{k}{2\pi|x-y|}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(k\,|x-y|)$$

où $\omega(k) = \operatorname{Im} k$.

Proposition 1.4

Il existe au plus une solution fondamentale sortante .

Preuve :

Soient y et z deux points distincts de R^n . Soient B_1 et B_2 deux boules centrées respectivement en y et z , $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Soit Ω_N l'intérieur d'une boule de rayon assez grand N, contenant B_1 et B_2 .

Posons $u(x) = F(k,x,y)$ $\quad v(x) = \tilde{F}(k,x,z)$

où $F(k,x,y)$ et $\tilde{F}(k,x,y)$ sont supposées être deux fonctions fondamentales sortantes.
Appliquons la formule de Green, à l'ouvert $\Omega_N \setminus (B_1 \cup B_2)$

$$0 = \int_\Omega (u\,A(x,D)\,v - v\,A(x,D)u)\,dx = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_N} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu_A} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right) d\sigma .$$

Examinons les intégrales de surface :

(i) sur Σ_N , on a $u \frac{\partial v}{\partial \nu_A} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = o\left(|x|^{-(n-1)}\right)$ puisque u et v satisfont 2.22 donc si on fait tendre N vers l'infini ; l'intégrale tend vers 0 .
Par suite :

$$\int_{\Gamma_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu_A} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right) d\sigma = -\int_{\Gamma_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu_A} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right) d\sigma$$

Par suite, en faisant tendre le rayon de B_1 et B_2, vers 0, sachant que F et $\hat{F}$ sont des fonctions de Lévi, on trouve d'une part $F(k,y,z)$ et d'autre part $\tilde{F}(k,y,z)$.

Proposition 1.5

S'il existe une solution fondamentale $F(k,x,y)$ de l'opérateur $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ on doit avoir :

$$\int_{S^{n-1}} F(k,r_1,\xi_1,r_2,\xi_2)\, Y_{\ell,m}(\xi_2)\, d\omega(\xi_2) = (r_1 r_2)^{-\frac{n-1}{2}}\, G_\alpha^\ell(k,r_1,r_2)\, Y_{\ell,m}(\xi_1)$$

où $G_\alpha^\ell(k,r_1,r_2)$ est la solution fondamentale de l'opérateur $A_\alpha^\ell - k^2$.

Preuve :

Supposons $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$. Pour k, r_1, r_2 fixé, F est une fonction de la variable $\vec{\xi}_2 \in S_{n-1}$, continue, donc dans $L^2(S_{n-1})$, admet un développement sur les harmoniques sphériques :

$$F(k, \vec{r}_1, r_2, \xi_2) = \sum_{\ell,m} (F(k, \vec{r}_1, r_2, .) \mid Y_{\ell,m}(.))\, Y_m^\ell(\xi_2)$$

La proposition explicite les coefficients.

Posons $H(k, r_2, r, \xi) = r^{-\frac{n-1}{2}}\, G_\alpha^\ell(k, r, r_2)\, Y_{\ell,m}(\xi)$

où G_α^ℓ est la solution fondamentale de l'opérateur $A_\alpha^\ell - k^2$, donné par le th. 1.3 .

Soit $\mathcal{C} = \{\vec{r} \in R^n : r_1 - \delta < r < r_2 + \delta\}$

$\Omega = R^n \setminus \mathcal{C}$

$\Omega_N = \{\vec{r} \in \Omega : r \leq N\}$

La fonction $u(r\xi) = H(k, r_2, r, \xi)$ est très régulière (C^∞) dans Ω .

On peut donc la représenter par la formule de Stokes (cf [39]). On a

$$u(r\,\xi) = \int_{\Omega_N} \left[u(x)\, \mathcal{M}_x F(k,x,r\xi) - F(k,x,r\xi)\, \mathcal{M}_x u(x)\right] dx$$

$$- \int_{\partial\Omega_N} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} F - F \frac{\partial}{\partial \nu} u\right) d\sigma \,.$$

Pour $y = r\xi$ fixé, $y_1 = r_1\xi_1$, $\mathcal{M}_x F(k,x,y) = o$ sauf au point $x = y$.

D'autre part, si $x = r\xi$

$$\mathcal{M}_x u(x) = (-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} - k^2)\, H(k,r_2,r,\xi) = (-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Delta_\xi^* - \frac{2\alpha}{r} - k^2)H$$

Comme $\quad -\Delta_\xi^* Y_{\ell,m}(\xi) = \ell(\ell + n-2)\, Y_{\ell,m}(\xi)$

on a aussi

$$\mathcal{M}_x u(x) = ((A_\alpha^\ell - k^2)\, G_\alpha^\ell(k, r_2, r))\, r^{-\frac{n-1}{2}}\, Y_{\ell,m}(\xi) = 0 \,.$$

Il suffit donc d'évaluer les intégrales de surface.
Nous pouvons éliminer l'intégrale sur Σ_N , puisque F cherchée est solution fondamentale sortante, et que :

$$u(r,\xi) = C(k,\ell,\alpha)\, r^{-\frac{n-1}{2}}\, \mathcal{M}_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_2)\, W_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\, Y_m^\ell(\xi)$$

L'expression ci-dessus montre que :

$$\frac{\partial}{\partial r}\, u(r\xi) = iku(r\xi) + o\,(r^{-\frac{n-1}{2}})$$

puisque W possède cette propriété.

Les deux autres intégrales donnent : $x = r\xi$

$$\int_{r=r_2-\delta} \left(u(x)\frac{\partial}{\partial r}F - F\frac{\partial}{\partial r}u\right)(r_2-\delta)^{n-1} d\omega(\xi) - \int_{r=r_2+\delta} \left(u(x)\frac{\partial}{\partial r}F - F\frac{\partial}{\partial r}u\right)(r_2+\delta)^{n-1} d\omega(\xi)$$

Il est clair que :

$$\lim_{\delta \to o} \int_{r=r_2-\delta} u(x)\frac{\partial G}{\partial r}\, d\omega(\xi) = \int_{r=r_2+\delta} u(x)\frac{\partial G}{\partial r}\, d\omega(\xi) = o$$

Il reste alors :

$$\int_{S^{n-1}} F(k,r_1,\xi_1),(r_2-\delta),\xi)\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\ G_\alpha^\ell(k,r_2,r)\right)\Big|_{r=r_2-\delta}\ Y_{\ell,m}(\xi)(r_2-\delta)^{n-1}\ d\omega(\xi)$$

$$-\int_{S^{n-1}} F(k,r_1,\xi_1,(r_2+\delta),\xi)\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-\frac{n-1}{2}}\ G_\alpha^\ell(k,r_2,r)\right)\Big|_{r=r_2+\delta}\ Y_{\ell,m}(\xi)\ (r_2+\delta)^{n-1}\ d\omega(\xi)$$

La dérivation du terme $r^{-\frac{n-1}{2}}$ amène deux termes égaux, qui se détruisent à la soustraction. Il faut donc tenir compte uniquement du saut de la dérivée de $G_\alpha^\ell(k,r_1,r)$ entre $r_2-\delta$ et $r_2+\delta$.

La différence ci-dessus, est encore égale à : (à une constante près $C(k,\ell,\alpha)$)

$$(k,r_1,\xi_1,r_2-\delta,\xi)(r_2-\delta)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{M}_{i\alpha/k;\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\right)\Big|_{r=r_2-\delta} W_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_2)Y_m^\ell(\xi)d\omega(\xi)$$

$$k,r_1,\xi_1,r_2+\delta,\xi)(r_2+\delta)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial r} W_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\right)\Big|_{r=r_2+\delta} \mathcal{M}_{i\alpha/k;\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_2)Y_m^\ell(\xi)\ d\omega(\xi)$$

or lorsque $\delta \to o$, $\lim_{\delta \to o} C(k,\ell,\alpha)\{W \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{M}_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\Big|_{r=r_2-\delta} - \mathcal{M}\left(\frac{\partial}{\partial r} W_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\right)$

car $C(k,\ell,\alpha)$ est le wronskien de W et $\mathcal{M}$. Donc, en définitive , on a

$$\int_{S^{n-1}} F(k,r_1,\xi_1,r_2,\xi)\ Y_m^\ell(\xi)\ d\omega(\xi) = (r_1r_2)^{-\frac{n-1}{2}}\ G_\alpha^\ell(k,r_1,r_2)\ Y_m^\ell(\xi)$$

Proposition 1.6

Considérons les fonctions définies formellement par les séries

(1) $$n>2 : F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}\ \frac{(r_1r_2)^{-\frac{n-1}{2}}}{(n-2)}\ \sum_{\ell=o}^{\infty}(2\ell+n-2)\ C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\ G_\alpha^\ell(k,r_1,r_2)$$

(2) $n=2$; $F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{(r_1 r_2)^{-1/2}}{2\pi} \{G^0_\alpha(k,r_1,r_2) + \sum_{\ell=1}^{\infty} 2 \cos \ell\theta \; G^\ell_\alpha(k,r_1,r_2)\}$

où $r_1 = |\vec{r}_1|$; $\cos\theta = \frac{(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{r_1 r_2}$; C^{ν}_ℓ est un polynôme de Gegenbauer ;

$$G^\ell_\alpha(k,r_1,r_2) = \frac{1}{2ik} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - i\alpha/k)}{\Gamma(2\ell+n-1)} \mathcal{M}_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_<) \, W_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_>)$$

$r_< = \inf(r_1,r_2)$, $r_> = \sup(r_1,r_2)$, $\ell \geq 0$, $n \geq 2$

$\mathcal{M}_{K,\mu}$ et $W_{K,\mu}$ sont les fonctions de Whittaker .

On a alors :

(1) Les séries (1) (2) convergent absolument, ainsi que leur dérivées par rapport à $\theta, r_1, r_2, \ldots$, la convergence est uniforme dans des compacts, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $r_1 \in K_1$, $r_2 \in K_2$, $k \in K_3$ avec $K_1 \cap K_2 = \emptyset$,

(2) $(-\Delta - \frac{2\alpha}{r_1} - k^2) \; F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = 0 \qquad \forall \vec{r}_1 \; , \; r_1 \neq r_2$

(3) On a une relation de récurrence, valable à partir de $n \geq 2$

$$F_{n+2}(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{(2\pi r_1 r_2)} \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)} F_n(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

Preuve :

On utilise essentiellement la représentation du produit de 2 fonctions de Whittaker ([9]) :

$$\frac{1}{2ik} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - i\alpha/k)}{\Gamma(2\ell+n-1)} \mathcal{M}_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_<) \, W_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_>) =$$

$$= (r_1 r_2)^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{ik(r_1+r_2)\operatorname{ch}s} (\coth s/2)^{i\alpha/k} \; I_{2\ell+n-2}(-2ik(r_1 r_2)^{1/2}\operatorname{sh}s)\,ds \; .$$

avec les conditions (i) $\mathrm{Im}\, k > o$; $r_1 \neq r_2$ (ii) $\Re(\ell + \frac{n-1}{2} - i\alpha/k) > o$,

qui assurent respectivement la convergence de l'intégrale à l'infini et à l'origine. Cette condition (ii) est triviale si α est $\leq o$, si $\alpha > o$, elle est satisfaite en dehors du cercle de centre $\alpha/n-1$, de rayon $\alpha/n-1$.

Nous avons vu que les dérivations de $C_\ell^\nu(\cos\theta)$ par rapport à θ , font intervenir une fonction du même type. D'autre part, les dérivations par rapport à k, r_1, r_2 n'altèrent pas la forme de l'intégrale ci-dessus.

Comme dans le calcul fait lors de la proposition 1.3 on montre qu'on peut exhiber une série majorante du type :

$$\sum_{\ell} \binom{\ell + p + n - 2}{\ell + p} \frac{1}{(2\ell + n-2)^{N_o}} \int_1^\infty e^{-(\mathrm{Im}k)(r_1^{1/2}-r_2^{1/2})^2 s}\, s^{N_o}\, ds$$

La relation de récurrence se démontre exactement de même que dans la proposition 1.3 : G_α^ℓ remplace formellement ϕ^ℓ .

Si $r_1 \neq r_2$, on a le droit de dériver terme à terme : en utilisant le fait que :

$$\sum_{m=1}^{h(\ell,n)} Y_{\ell m}(\xi)\,(n) = \frac{2\ell + n - 2}{(n-2)\,\omega_n} C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)$$

On a ainsi :

$$(-\Delta_{r_1,\xi} - \frac{2\alpha}{r_1} - k^2)\left[G_\alpha^\ell(k, r_1, r_2)\, Y_{\ell,m}(\xi)\right] = o$$

Nous étendrons cette propriété, lorsque $r_1 = r_2$ et $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$,

Proposition 1.7

Soit $F(k, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ la fonction définie dans la proposition 1.6 .

On a les diverses représentations de F :

$$(1)\quad F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{(-ik)^{n-2}}{(4\Pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_1^{+\infty} e^{iku\xi} \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{iv} (\xi^2-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{I_{\frac{n-3}{2}}(z(\xi))}{\left(\frac{z(\xi)}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}} d\xi$$

où $z(\xi) = -ik(u^2 - v^2)^{1/2} (\xi^2-1)^{1/2}$; $u = r_1 + r_2$, $v = \alpha/k$.

$v = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$

pour $\operatorname{Im} k > 0$, $\Re(\frac{n-1}{2} - i\alpha/k) > o$

$$(2)\quad F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{e^{iku}}{4\pi^{\frac{n}{2}} u^{n-2}} \sum_{\ell=o}^{\infty} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell+\frac{n-2}{2})}{\ell!\,\Gamma(2\ell+n-2)} \int_o^{+\infty} e^{-s}\, s^{2\mu-1} \left(1-\frac{2iku}{s}\right)^{\mu+1/2+iv} ds$$

$\operatorname{Im} k \geqslant 0$, $\Re(\frac{n-1}{2} - i\alpha/k) > o$ $\quad \mu = \ell + \frac{n-2}{2}$; $\nu = \alpha/k$

On a aussi : $(-\Delta - \frac{2\alpha}{r_1} - k^2)\ F(k, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = o \quad \forall\ \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$.

Preuve :

Il est clair que la représentation (2) définit un prolongement pour $\operatorname{Im} k \geqslant o$. D'autre part, il est clair que $F(k, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ est continue et même indéfiniment dérivable si $r_1 \neq \vec{r}_2$. En particulier, si $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$ et $r_1 = r_2$

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{r_1} - k^2)\ F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \lim_{y \to \vec{r}_2} (-\Delta - \frac{2\alpha}{r_1} - k^2)\ F(k,\vec{r}_1,\vec{y})$$

En choisissant $|\vec{y}| \neq r_1$, le deuxième membre est nul. Ce qui démontre

3). Pour démontrer (1), on utilise la relation de récurrence et on calcule F, pour $n=2$ et $n=3$, en utilisant exactement le même procédé que lors de la proposition 1.3. On passe de (1) à (2), en développant, la série :

$$\frac{J_{\frac{n-3}{2}}(z(\xi))}{(z(\xi))^{\frac{n-3}{2}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(z(\xi))^{2\ell}}{\ell!} \frac{1}{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2})} = 2^{n-3} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{2\ell} (u^2 - v^2)^{\ell} \Gamma(\ell + \frac{n-2}{2}) (\xi^2-1)^{\ell}}{\Pi^{1/2} \Gamma(2\ell + n - 2)}$$

Considérons la série :

$$(-ik)^{n-2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{2\ell}(u^2-v^2)^{\ell}}{\Gamma(2\ell + n - 2)} \Gamma(\ell + \frac{n-2}{2}) \int_1^{+\infty} e^{iku\xi} \left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{iv} (\xi^2-1)^{\ell + \frac{n-3}{2}} d\xi$$

Faisons le changement de variable : $(\xi-1) = \frac{s}{-iku}$. La série devient :

$$\frac{e^{iku}}{u^{n-2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell+ \frac{n-2}{2})}{\Gamma(2\ell+n-2)} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{2\ell+n-3} \left(1 - \frac{2iku}{s}\right)^{\ell + \frac{n-3}{2}+iv} ds$$

Rappelons que $u = r_1 + r_2$, $v = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, donc si $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$, $o \leq \frac{u^2-v^2}{u^2} < 1$.

Soit K_1 et K_2 deux compact de R^n tel que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Par suite si $r_1 \in K_1$ et $r_2 \in K_2$, $\exists \alpha_1 < 1$ tq $\left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right) \leq \alpha_1 < 1 \quad \forall r_1 \in K_1, r_2 \in K_2$.

Par suite si $\left(1 + \frac{2|k|u}{A}\right) \alpha_1 < 1$, la série, avec l'intégration partant de A à ∞, est majorée par :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right)^{\ell} \left(1 + \frac{2|k|u}{A}\right)^{\ell} \Gamma(\ell + \frac{n-2}{2}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\gamma^{\ell}}{\ell!} \Gamma(\ell + \frac{n-2}{2})$$

or cette série n'est autre que $(1 - \gamma)^{-\frac{n-2}{2}}$ puisque $\gamma < 1$: Cette série converge. Donc on a la droit d'intervertir Σ et $\int_A^{+\infty}$. Il est trivial qu'on peut intervertir Σ et $\int_0^A$ donc, on a aussi :

$$(k, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{e^{iku}}{u^{n-2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell+ \frac{n-}{2}}{\ell!\Gamma(2\ell+n-2)} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{2\ell+n-3} \left(1 - \frac{2iku}{s}\right)^{\ell+\frac{n-3}{2}+iv} d$$

c.q.f.d.

Remarque :

La formule (1) a été donnée pour la première fois par Hostler [23]. Pour $n=3$, et plus généralement pour n impair, Hostler a montré que F a une expression en fonction somme de produit de fonctions de Whittaker et de leurs dérivées, c'est l'objet de la proposition 1.8

Proposition 1.8 (HOSTLER)

Soit $n = 3$, alors :

$$F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi}\frac{\Gamma(1-i\alpha/k)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\left(\mathcal{M}'_{i\alpha/k,1/2}(-iku_1)\mathcal{W}_{i\alpha/k,1/2}(-iku_2) - \mathcal{M}_{i\alpha/k,1/2}(-iku_1)\mathcal{W}'_{i\alpha/k,1/2}(-iku_2)\right)$$

où $u_1 = \left(|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)$, $\quad k^2 \neq \frac{\alpha^2}{l^2}$, $l = 0, 1 \ldots\ldots$

$u_2 = \left(|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| + |\vec{r}_1-\vec{r}_2|\right)$

$\mathcal{M}_{K,\Gamma}$ et $W_{K,\Gamma}$ sont les fonctions de Whittaker.

Preuve

Nous partons avec la représentation de la proposition 1.7 :

$$F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{(-ik)}{4\pi}\int_1^\infty e^{iku\xi}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{\frac{i\alpha}{k}} I_o\left(-ik(u^2-v^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)d\xi$$

où $u = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|$, $v = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, $\mathrm{Im}\, k > o$ $\quad \Re(1 - i\alpha/k) > o$

Nous voulons utiliser l'expression du produit de 2 fonctions de Whittak donnée dans la démonstration de la proposition 1.5.

La relation :

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)\left(z^\nu I_\nu(z)\right) = z^{\nu-m} I_{\nu-m}(z)$$

implique :

$$F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(-iks\int_1^\infty e^{ikt\xi}(\xi+1)^{\frac{i\alpha}{\kappa}-\frac{1}{2}} I_1\left(-iks(\xi^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)d\xi\right)$$

où $s = (u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}$ $\quad t = u$,

et par suite :

$$F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -\frac{\Gamma(1-i\alpha/k)}{4\pi\, ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\mathcal{M}_{i\alpha/k,1/2}(-iku_2)\ \mathcal{W}_{i\alpha/k,1/2}(-iku_2)\right)$$

En considérant les relations $u_1 = t + (t^2 - s^2)^{1/2}$ $\quad u_2 = t - (t^2 - s^2)^{1/2}$

Cette dernière expression est égale à la formule demandée puisque :

$$\frac{\partial}{\partial s} f = \frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial s}$$

§ 3 - Expression stationnaire des opérateurs de Dollard et généralisation du théorème de J.M.COOK - S.T. KURODA.

Dans ce paragraphe nous étendons à n quelconque, le résultat prouvé par Dollard pour n = 3. Ensuite nous considerons de perturbations de l'opérateur H_α par des potentiels p satisfaisant les propriétés (i) (ii) de la proposition 1.2. Nous prouvons alors l'existence des opérateurs d'ondes $W_\pm (H_\alpha, H_\alpha + p)$ en faisant sur p les mêmes hypothèses faites par S.T. KURODA dans le cas $\alpha = 0$.

De façon précise, S.T. KURODA a demontré dans [31.4] que si p satisfait à l'hypothèse:

$$(3.1) \qquad (1 + |x|)^{-(\frac{n}{2} - 1) + \varepsilon} \qquad p(x) \in L^2(R^n) , \quad \varepsilon > 0$$

les opérateurs d'ondes:

$$(3.2) \qquad W_\pm (H_o, H_o + p) = \lim_{t \to \pm \infty} e^{it(H_o+p)} e^{-itH_o}$$

existent. En particulier si

$$(3.3) \qquad p(x) = O(|x|^{-(1+\varepsilon)}) \qquad \varepsilon > 0$$

l'hypothèse (3.1) est satisfaite.

Dollard a montré le premier (en 1963), que pour une fonction ne satisfaisant pas (3.1), en l'occurence $p(x) = \frac{1}{|x|}$, et n = 3, les opérateurs d'ondes définis par (3.2) n'existaient pas. Il montra dans ce cas qu'en introduisant une famille d'opérateurs unitaires (commutant avec H_o) que nous désignerons par $e^{iH_o'(t)}$, alors les opérateurs d'ondes généralisés

$$(3.4) \qquad W_\pm^D (H_o , H_o + p) = \lim_{t \to \pm \infty} e^{it(H_o+p)} e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)}$$

étaient bien définis. Ce sont des opérateurs partiellement isométriques, possédant encore la propriété d'entrelacement.

$$(3.5) \qquad W_\pm^D H_o = H W_\pm^D$$

Après lui, W. AMREIN - Ph. MARTIN - B. MISRA dans [4]; V. BUSLAEV et V.B. MATVEEV dans [5]; P. ALSHOM et T. KATO dans [2], ont étendu le résultat de Dollard à des fonctions p , un peu plus générales avec une famille $e^{iX(t)}$ adéquate. De façon précise , supposons que :

(3.6) $\quad p(x) = q_1(x) + q_2(x)$

chacune satisfaisant, outre ((i) (ii) proposition 1.2)

(3.7)
$$\text{(i)} \qquad q_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{\varepsilon}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial|x|} q_1(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right) \quad \varepsilon > 0$$
$$\text{(ii)} \qquad q_2(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right).$$

Alors il est possible de construire une famille d'opérateurs unitaires $e^{iX(t)}$ commutant avec H_o de telle sorte que

$$W_{\pm}^{D}\ (H_o + p\ ,\ H_o) = \lim_{t \to \infty} e^{it(H_o+p)}\ e^{-it H_o}\ e^{iX(t)}$$

existent et ont les propriétés attendues.

Une fois l'existence des opérateurs d'ondes obtenue, on sait qu'ils sont des opérateurs partiellement isométriques de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $E_{ac}(0,+\infty)\ L^2(\mathbb{R}^n)$. On dit que $W_{\pm}$ est complet, si l'image est égale à $E_{ac}(0,+\infty)\ .\ L^2(\mathbb{R}^n) = L^2_{ac}(\mathbb{R}^n)$. Une méthode très souvent employée, consiste à trouver des opérateurs stationnaires, définissant des isométries surjectives de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2_{ac}(\mathbb{R}^n)$ et d'établir leur égalité avec $W_{\pm}$. Ces opérateurs peuvent rester abstraits: c'est le cas de la théorie de la perturbation nucléaire dévéloppée par Rosemblum - KATO - BIRMAN - [26] [8] [56]
Soit H_o un opérateur autoadjoint quelconque. Soit $H = H_o + V$, où V est un opérateur nucléaire. Alors, si $R_o(z) = (H_o - z)^{-1}$, $Q_o(z) = I + VR_o(z)$, et si $E(\lambda)$ est le projecteur spectral associé à H, on définit un opérateur $\mathcal{U}_{+}$ isométrique de sousespace absolument continu de H_o sur le sousespace absolument continu de H, par:

(3.8) $$(\mathcal{U}_{\pm} f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{d\lambda}\left(E_\lambda\, Q^{o}(\mu \pm io) f|g\right)\right]_{\mu=\lambda} d\lambda \ . \quad f,g \in \mathcal{H}.$$

Lorsque V est nucléaire, on donne un sens à l'expression sous le signe $\int$. Cela repose essentiellement sur le fait qu'une fonction à valeurs dans un espace de Hilbert (en l'occurence ici l'espace de Hilbert des opérateurs Hilbert-Schmidt avec le produit scalaire $(A,B) = \text{trace}\,(AB^{*})$) à variation fortement bornée est dérivable presque partout. (cf. [56]).

L'hypothèse V nucléaire peut être affaiblie si on tient compte de H_o.

l y a diverses conditions qui tiennent compte de H_o. (voir [56]). Les opérateurs $\mathcal{U}_\pm$ peuvent être construits d'une manière explicite mais alors avec des onditions assez fortes sur la fonction $p(x)$: c'est la méthode du développement n fonctions propres.

Dollard a montré qu'en utilisant le développement en fonctions propres pour n = 3) de H_α, fait en 2.3, on obtiendrait la relation:

3.9) $$W_\pm^D (H_o, H_\alpha) = \overline{\mathcal{F}}_\alpha^{\pm} \mathcal{F}_o.$$

artant de l'expression de $\mathcal{F}_\alpha^{\pm}$, sans utiliser la reduction que nous avons au aragraphe 1, sa démonstration est très technique et surtout ne s'apprete pas acilment à la généralisation pour n quelconque. S'appuyant sur l'étude faite u §.1, nous obtenons une démonstration plus longue mais plus générale.

.1 Expression stationnaire des opérateurs d'ondes de Dollard.

Soit A_α^1 l'opérateur auto-adjoint associé à l'opérateur différentiel ormel

$$= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1 + \frac{n-2}{2})^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2\alpha}{r}, \text{(définition 1.1.)}$$

Nous définissons une famille d'opérateurs unitaires dans $L^2(R^+)$, notée $iA_o'(t)$, par:

3.10) $$(e^{iA_o'(t)} f)(r) = \int_o^{+\infty} \phi_o(k,r)\, e^{i\varepsilon(t)\alpha/k \log 4|t|k^2} (\mathcal{F}_o f)(k)\, dk$$

a fonction $\phi_o(k,r)$ et la transformation $\mathcal{F}_o$ ont été définies sous-paragraphe 2.3. n note par $\varepsilon(t)$ la fonction égale à ± 1 suivant que t est $\gtrless 0$, $|t| > 1$.

héorème 1.7

Les opérateurs d'ondes généralisés $W_\pm^D (A_\alpha^1, A_o^1) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itA_\alpha^1} e^{-itA_o^1} e^{iA_o'(t)}$ xistent, et s'expriment par:

1) $$W_\pm^D (A_\alpha^1, A_o^1) = \mathcal{F}_\alpha e^{\pm i\delta_1(.)} \mathcal{F}_o.$$

où $e^{i\delta_1(.)}$ est l'opérateur unitaire de multiplication:

$$(e^{i\delta_1(.)} f)(k) = e^{i\mathrm{Arg}\Gamma(1 + \frac{n-1}{2} + i\alpha/k)} f(k)$$

Preuve :

L'existence des opérateurs $W_{\pm}^{D}$ résulte de [2] . Nous prouvons l'égalité (1) sur un ensemble dense dans $L^2(R^+)$. Nous choisissons comme tel ensemble, $\mathcal{C}$, les fonctions, satisfaisant

$f \in \mathcal{C} \iff f \in \mathcal{S}(R^+)$, $\mathcal{F}_0 f$ s'annule au voisinage de 0.

La relation (1) est alors équivalente à

$$(2) \qquad \lim_{t \to \pm \infty} e^{itA_\alpha^\ell} e^{-itA_0^\ell} e^{+itA_0'(t)} f = \overline{\mathcal{F}}_\alpha \, (e^{\pm i\delta_\ell(.)} \hat{f}(.))$$

Par suite, en appliquant à gauche et à droite, $\overline{\mathcal{F}}_\alpha$, à la relation suivante

$$(3) \qquad \lim_{t \to \pm \infty} \mathcal{F}_\alpha (e^{itA_\alpha^\ell} e^{-itA_0'(t)} f) = e^{\pm i\delta_\ell(.)} \hat{f}$$

on obtiendra (2). $\mathcal{F}_0$ est un isomorphisme de $L^2(R^+)$ sur $L^2(R^+)$, qui diagonalise A_0^ℓ et $A_0'(t)$: $\mathcal{F}_0 e^{-itA_0^\ell} e^{iA_0'(t)} \overline{\mathcal{F}}_0$ est la multiplication par la fonction $e^{it(.)^2} \, e^{\frac{i\alpha}{(.)} \varepsilon(t) \log 4|t| \, (.)^2}$

D'autre part, comme $\mathcal{F}_\alpha$ diagonalise H , on a

$$\mathcal{F}_\alpha \, e^{itA_\alpha^\ell} \, g = e^{it(.)^2} \, (\mathcal{F}_\alpha \, g) \, (.)$$

Par suite, comme $g = \overline{\mathcal{F}}_0 \, \mathcal{F}_0 g$, la preuve de (3) est équivalente à la démonstration de

$$(4) \qquad \lim_{t \to \pm \infty} e^{itk^2} \, (\mathcal{F}_\alpha \overline{\mathcal{F}}_0) \, (e^{-it(.)^2} \, e^{i\frac{\alpha}{(.)} \varepsilon(t) \log 4|t| (.)^2} \hat{f}(.))(k) = e^{\pm i\delta_\ell(k)} \hat{f}(k)$$

Nous allons dégager dans le lemme suivant comment opère $\mathcal{F}_\alpha \, \overline{\mathcal{F}}_0$

Lemme 1.1 soit $g \in \mathcal{S}(R^+)$, $g = o$ au voisinage de 0 , alors

$$(\mathcal{F}_\alpha \bar{\mathcal{F}}_o\ g)\ (k) = \lim_{\varepsilon \to o} \int_o^{+\infty} (V_+(k,u,\varepsilon) + V_-(k,u,\varepsilon))\ g(u)\ du$$

où $V_\pm(k,u,\varepsilon) = e^{\pm i\delta_\ell(k)} \dfrac{e^{\Pi\frac{\alpha}{2k}}}{2\Pi}\ \Gamma(1 - i\alpha/k)\ \left(\dfrac{\pm i\varepsilon+u-k}{\pm i\varepsilon+u+k}\right)^{\pm i\alpha/k}\ \dfrac{2ik}{(\pm i\varepsilon+u-k)\ (\pm i\varepsilon+u+k)}$

$$\left(\frac{4ku}{\varepsilon^2 + (u+k)^2}\right)^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ F_{21}\left(\ell+\frac{n-1}{2};\ i\alpha/k\ ;\ \ell+\frac{n-1}{2}\ ;\ 1 - i\alpha/k\ ;\ \frac{\varepsilon^2 + (u-k)^2}{\varepsilon^2 + (u+k)^2}\right)$$

Preuve :

Il faut remarquer que l'intégrale a un sens, car F_{21} a une singularité lorsque $u=0$, mais comme g est nulle au voisinage de 0, il n'y a plus de problème. La convergence à l'infini est assurée par l'appartenance de g à $\mathcal{S}$, la fonction hypergéométrique étant bornée.

On a :

$$(\mathcal{F}_\alpha h)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\ \frac{\left|\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2} \pm i\alpha/k)\right|}{\Gamma(2\ell + n-1)}\ e^{\frac{\Pi\alpha}{2k}} \int_o^{+\infty} (2kr)^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ F_{11}(\ell+\frac{n-1}{2}\pm i\alpha/k;2\ell+n-1;\pm 2ikr)e^{\mp ikr}$$

De sorte que :

$$(\mathcal{F}_\alpha \bar{\mathcal{F}}_o\ g)\ (k) = \lim_{\varepsilon \to o}\ \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{2\Pi}\ \frac{(\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2} \pm i\alpha/k)\ \Gamma(\ell+\frac{n-1}{2})}{(\Gamma(2\ell + n-1))^2}$$

$$e^{-\varepsilon r}(2kr)^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ F_{11}(\ell+\frac{n-1}{2} \pm i\alpha/k;2\ell+n-1;\pm 2ikr)e^{\mp ikr} \int_o^{+\infty} (2ur)^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ F_{11}(\ell+\frac{n-1}{2};2\ell+n-1;\pm 2iur)e^{\mp iur} g(u)$$

L'introduction artificielle de $e^{-\varepsilon r}$ permet de donner un sens à l'intégrale double et permet donc d'intervertir les deux intégrales.

On a donc, d'après Fubini, l'égalité avec :

$$\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_o g)\ (k) = \frac{e^{\Pi^{\alpha/2k}}}{2\Pi} \frac{|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm i\alpha/k)|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2})}{} \lim_{\varepsilon \to o} \int_o^{+\infty} g(u)\ \mathcal{U}(k,u,\varepsilon)\ du$$

$$\hat{u}\ \mathcal{U}(k,u,\varepsilon) = \frac{(4ku)^{\ell + \frac{n-1}{2}}}{\Gamma(2\ell + n-1)} \int_o^{+\infty} e^{-\varepsilon r}\ r^{2\ell+n-1}\ F(a;c;\pm 2ikr)\ F(a';c;\pm 2iur) e^{\mp ikr}\ e^{\mp iur}\ dr\ .$$

$$\hat{u}\quad a_\pm = \ell + \frac{n-1}{2} \pm i\alpha/k\ ;\quad a' = \ell + \frac{n-1}{2}\ ;\quad c = 2\ell + n-1\ .$$

Posons :

$$(k,u,\varepsilon) = \frac{(4ku)^{\ell + \frac{n-1}{2}}}{\Gamma(2\ell+n-1)} \int_o^{+\infty} e^{-\varepsilon r}\ e^{\mp ikr}\ e^{\mp iur}\ r^{2\ell+n-2}\ F(a_\pm;c;\pm 2ikr)\ F(a';c;\pm 2iur)\ dr$$

Cette intégrale converge à l'infini grâce à $\varepsilon > o$, et à l'origine si $n \geq 2$, et par suite, il est clair que :

$$\mathcal{U}(k,\ u,\ \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\ V(k,\ u,\ \varepsilon)$$

Pour calculer l'intégrale ci-dessus, nous nous appuyons sur la relation [36]

$$\frac{1}{\Gamma(c)} \int_o^{+\infty} e^{-\alpha t}\ t^{c-1}\ F(a;c;t)\ F(a';c;\lambda t)dt = (\alpha-1)^{-a}(\alpha-\lambda)^{-a'}\ \alpha^{a+a'-c}\ F(a;a';c;\frac{\lambda}{(\alpha-1)(\alpha-}$$

avec $\mathcal{R}ec > o$, $\mathcal{R}e\ \alpha > \mathcal{R}e\ \lambda + 1$.

en utilisant l'alternative possible avec les signes $\pm$, on peut donc écrire :

$$V(k,u,\varepsilon) = \frac{(4uk)^{\ell + \frac{n-1}{2}}}{\Gamma(2\ell+n-1)} \int_o^{+\infty} r^{2\ell+n-2}\ e^{-\varepsilon r} e^{-iur} e^{ikr}\ F(a_+;c;-2ikr)\ F(a';c;2iur)\ dr$$

$$= \quad " \quad \int_o^{+\infty} r^{2\ell+n-2} e^{-\varepsilon r}\ e^{iur}\ e^{-ikr}\ F(a_-;c;2ikr)\ F(a';c;-2ikr)\ dr.$$

Dans la première intégrale, faisant le changement de variables $2ur = s$, et dans la seconde $2kr = s$, on obtient :

$$V(k,u,\varepsilon) = (k/u)^{\ell+\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Gamma(2\ell+n-1)} \int_0^{+\infty} s^{2\ell+n-2}\, e^{-s\left[\frac{\varepsilon+i(u-k)}{2u}\right]} F(a_+;c;-i(k/u)s)\ F(a';c;is)\,ds$$

$$= (u/k)^{\ell+\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Gamma(2\ell+n-2)} \int_0^{+\infty} s^{2\ell+n-2}\, e^{-s\left[\frac{\varepsilon+i(k-u)}{2k}\right]} F(a_+;c;is)\ F(a';c;-i(u/k)s)\,ds$$

Considérons maintenant la fonction $f(z)$, définie par

$$f(z) = z^{2\ell+n-2}\ e^{-\alpha z}\ F(a,c,z)\ F(a';c;\lambda z)$$

sous les conditions $\Re e\ \alpha > \Re e\ \lambda + 1$. L'intégrale sur γ_R , où γ_R désigne le quart du cercle contenu dans le 1er quadrant, tend vers 0 lorsque $R \to \infty$. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\vec{\gamma}_2} f(z)\,ds$$

où $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ représentent respectivement le demi axe réel et le demi axe imaginaire tous deux positifs, et orientés de 0, à $+\infty$. Par suite

$$\int_{\vec{\gamma}_1} f(z)\,dz = \int_0^{+\infty} s^{2\ell+n-2}\, e^{-\alpha s}\, F(a;c;s)\ F(a';c;\lambda s)\,ds$$

$$= \int_0^{+\infty} (is)^{2\ell+n-2}\, e^{-i\alpha s}\, F(a;c;is)\ F(a';c;i\lambda s)\,ids$$

La première intégrale est calculable à partir de la relation donnée plus haut sous réserve des conditions sur α et λ tandis que la seconde est à une constante près ce que l'on veut calculer, dès lors qu'on pose :

$$i\alpha = \frac{\varepsilon + i(u-k)}{2u}\ , \quad \lambda = -k/u \quad (\text{resp. } i\alpha = \frac{\varepsilon + i(k-u)}{2k};\ \lambda = -u/k)$$

La condition $\Re e\ \alpha < \Re e\ \lambda + 1$ est alors équivalente à $k > u$ (resp. $k < u$).

On peut donc calculer $V(k,u,\varepsilon)$ dans les deux cas $u > k$ et $u < k$. D'où

$$V(k,u,\varepsilon) = (i)^{2\ell+n-1}\ (\alpha-1)^{-a}\ (\alpha-\lambda)^{-a'}\ \alpha^{a+a'-c}\ (-\lambda)^{c/2}\ F_{21}(a;a';c;\frac{\lambda}{(\alpha-1)\ (\alpha-\lambda)})$$

avec :

si $k > u$; $\alpha = \frac{-i\varepsilon+(u-k)}{2u}$; $\lambda = -k/u$; $a = \ell+\frac{n-1}{2}$; $a' = \ell+\frac{n-1}{2} -i\alpha/k$; $c = 2\ell+n-1$

si $k < u$; $\alpha = \frac{-i\varepsilon+(k-u)}{2k}$; $\lambda = -u/k$; $a = \ell+\frac{n-1}{2} +i\alpha/k$; $a'=\ell+\frac{n-1}{2}$; $c=2\ell + n-1$

D'où : si $k > u$

$$V(k,u,\varepsilon) = (\frac{4ku}{\varepsilon^2+(u+k)^2})^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ (\frac{-i\varepsilon+(u)k)}{-i\varepsilon+(u+k)})^{-i\alpha/k}\ F_{21}(\ell+\frac{n-1}{2} -i\alpha/k;\ell+\frac{n-1}{2};2\ell+n-1;\frac{4ku}{\varepsilon^2+(u+k)^2})$$

On vérifie en tenant compte de la relation [36]

$$F_{21}(a;\ b;\ c;\ z) = (1-z)^{c-(a+b)}\ F_{21}(c-a;\ c-b;\ c;\ z)$$

qu'on a la même expression pour $k < u$.

$V(k,u,\varepsilon)$ contient une singularité lorsque $k=u$ puisque F_{21} est singulière au point $z=1$. Pour utiliser le fait que $\hat{f}(k)=o$ au voisinage de o on va ramener la singularité à $z=o$. Pour cela, on utilise la relation [36] .

$$F_{21}(a;\ b;\ c;\ z) = \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-(a+b))}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b)}\ F_{21}(a;\ b;\ 1+a+b-c;\ 1-z)$$

$$+ (1-z)^{c-(a+b)}\ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\ \Gamma(b)}\ F_{21}(c-a;\ c-b;\ 1+c-(a+b);\ 1-z)$$

Par suite, si $k \neq u$, on a

$$\frac{|\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2}\pm i\alpha/k)|\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(2\ell+n-1)}\mathcal{U}(k,u,\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{\mathcal{U}_+(\varepsilon,u,k)+\mathcal{U}_-(\varepsilon,u,k)\}$$

$$,u,k) = \overline{+}e^{\overline{+}i\delta(k)}\Gamma(\pm i\alpha/k)\ (\frac{i\varepsilon+u-k}{i\varepsilon+u+k})^{\overline{+}i\alpha/k}(\frac{(4uk)}{\varepsilon^2+(u+k)^2})^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ {}_2F_1(\ell+\frac{n-1}{2}\overline{+}i\alpha/k;\ell+\frac{n-1}{2};1\overline{+}i\alpha/k,\frac{\varepsilon^2+(u-k)^2}{\varepsilon^2+(u+k)^2})$$

La partie du noyau obtenue lors de la dérivation des termes distincts du premier, n'amène pas de trouble : en utilisant le fait que $\hat{f}(u) = o$ au voisinage de 0, la contribution de ces termes, lorsque $\varepsilon \to o$, est nulle. Il reste à tenir compte uniquement de la dérivation par rapport à ε, du terme $(\frac{\overline{+}i\varepsilon+u-k}{\overline{+}i\varepsilon+u+k})^{\overline{+}i\alpha/k}$, ce qui prouve le lemme 1.1

On a donc :

$$\overline{\mathcal{F}}_o g)(k) = \lim_{\varepsilon\to o}\ \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{2\Pi}\{e^{-i\delta(k)}\Gamma(1-i\alpha/k)\int_o^{+\infty}(\frac{+i\varepsilon+u-k}{+i\varepsilon+u+k})^{+i\alpha/k}\ \frac{(2ik)f^+(u,k,\varepsilon)}{(+i\varepsilon+u-k)(+i\varepsilon+u+k)}\,du$$

$$+ e^{+i\delta(k)}\Gamma(1+i\alpha/k)\int_o^{+\infty}(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k})^{-i\alpha/k}\ \frac{(-2ik)f^-(u,k,\varepsilon)}{(-i\varepsilon+u-k)\ (\overline{+}i\varepsilon+u+k)}du\}$$

$$f^{\pm}(u,k,\varepsilon) = (\frac{4uk}{\varepsilon^2+(u+k)^2})^{\ell+\frac{n-1}{2}}\ {}_2F_1(\ell+\frac{n-1}{2}\pm i\alpha/k;\ \ell+\frac{n-1}{2};\ 1\pm i\alpha/k;\ \frac{\varepsilon^2+(u-k)^2}{\varepsilon^2+(u+k)^2})$$

Observons que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to o\\ u\to k}} f^{\pm}(u,k,\varepsilon) = 1\ .$$

On peut donc écrire :

$f_{\pm}(k,u,\varepsilon)\ \hat{f}(u) = \hat{f}(k) + (k-u)\ g(u,k,\varepsilon)$, où $g(u,k,\varepsilon)$ est une fonction C^{∞} dans $R_+ \times R_+$, bornée, $g(k,k,o) = 0$.

Reprenons l'expression (1) : on est ramené à examiner d'une part

$$\lim_{t\to\pm\infty}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\ \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{2\Pi}\int_a^{+\infty} e^{itk^2}\,\hat{f}(k)\,\{e^{-i\delta_\ell(k)}\,\frac{(-2ik)\Gamma(1+i\alpha/k)}{(-i\varepsilon+u-k)(-i\varepsilon+u+k)}\,\left(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k}\right)^{-i\alpha/k}$$

$$+\ e^{+i\delta_\ell(k)}\,\frac{(2ik)\,\Gamma(1-i\alpha/k)}{(i\varepsilon+u-k)\,(i\varepsilon+u+k)}\,\left(\frac{i\varepsilon+u-k}{i\varepsilon+u+k}\right)^{i\alpha/k}\}\,e^{-itu^2}\,(4u^2|t|)^{\pm i\alpha/u}\,du$$

et d'autre part :

$$\lim_{t\to\pm\infty}\ \int_a^{+\infty} ue^{it(k^2-u^2)}\,\{(4u^2|t|)^{\pm i\alpha/u}\,\frac{1}{u}\,\left(\frac{u-k}{u+k}\right)^{i\alpha/k}\,\frac{g(k,u)}{(u+k)}\}du$$

en intégrant par parties. On est ramené à :

$$\lim_{t\to\pm\infty}\ -\frac{1}{2it}\int_a^{+\infty} e^{it(k^2-u^2)}\,\frac{d}{du}\,((4u^2|t|)^{\pm i\alpha/u}\,\frac{1}{u}\,\left(\frac{u-k}{u+k}\right)^{i\alpha/k}\,\frac{g(k,u)}{(u+k)})\,du$$

Rappelons que l'intégration se fait sur l'intervalle $[a, +\infty[$ où $a>0$, où Supp $\hat{f}(u) = [a, +\infty[$.

Comme $\left|\frac{g(k,u) - g(k,k)}{k-u}\right| \leq M$, par construction de g, il n'y a pas de singularités en $k=u$ dans cette deuxième intégrale. L'intégrale étant finie, la présence de $\frac{1}{t}$ fait que la limite est nulle.

Il faut donc évaluer uniquement la première expression qui est composée de deux termes. Suivant que $t \to \pm\infty$, c'est l'un d'eux qui tend vers la quantité désirée tandis que l'autre tend vers 0.

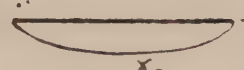
En effet, considérons par exemple :

$$\frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{2\Pi}\int_0^{+\infty} e^{itk^2}\,e^{-i\delta_\ell(k)}\,\hat{f}(k)\,\frac{(-2ik)\,\Gamma(1+i\alpha/k)}{(-i\varepsilon+u-k)\,(-i\varepsilon+u+k)}\,\left(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k}\right)^{-i\alpha/k}\,du$$

La fonction sous le signe $\int$ est singulière en $u = k+i\varepsilon$, et $u = i\varepsilon-k$.

C'est donc une fonction analytique dans le demi plan inférieur $\mathrm{Im}\, u < o$.

On peut donc calculer cette intégrale comme une intégrale de contour.

$\int_\gamma f(z)\,dz$, où γ est la courbe 

avec R tendant vers l'infini. La présence du facteur $\frac{1}{u^2}$ rend la convergence uniforme par rapport à ε et t, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_R^\infty f(u)du$ peut être rendu arbitrairement petit, en choisissant R assez grand, indépendant de t et ε. Mais par ailleurs l'intégrale sur le segment $[0,R]$, est égale à l'intégrale sur l'arc de courbe. Sur cet arc, $u = u_1+iu_2$, avec $u_1\, u_2 < o$, et le comportement de e^{itu^2} est celui de $e^{itu_1u_2}$. Par suite si $t \to +\infty$, l'intégrale sur γ_R tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Examinons alors l'autre terme : En faisant le changement de variable $(i\varepsilon + u - k)t = \sigma$, on obtient :

$$\lim_{t\to\infty}\ \lim_{\varepsilon\to o} e^{i\delta(k)}\hat{f}(k)\,\frac{2ik}{2\Pi}\,\Gamma(1-i\alpha/k)\int_{\gamma_+}\sigma^{-(1-i\alpha/k)}e^{-tik\sigma}\ h(\sigma,k,t,\varepsilon)\,d\sigma\ .$$

où $\gamma_+ = i\varepsilon t - kt + s$, $s \geqslant o$

On montre alors assez laborieusement que lorsque $\varepsilon \to o$ et $t \to +\infty$, cette intégrale tend vers

$$e^{i\delta(k)}\,\hat{f}(k)\ \left(\frac{ik}{\Pi}\right)\Gamma(1-i\alpha/k)\ e^{\Pi\alpha/2k}\ (2k)^{-(1-i\alpha/k)}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty} e^{-2ik\sigma}\ \sigma^{-(1-i\alpha/k)}d\sigma,\ c > o.$$

Or, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{(\sigma\, e^{-i\Pi})^{1-z}}{2\Pi i}\int_\Gamma t^{-z}\, e^{-t\sigma}\,dt \quad \text{où } \Gamma \text{ est un contour dépendant de } \sigma.$$

Par suite, le terme calculé ci-dessus se réduit à $e^{i\delta(k)}\,\hat{f}(k)$ c.q.f.d.

Théorème 1.8 (extension du th. de Dollard à n quelconque)

Considérons la famille d'opérateurs unitaires dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, commutant avec Δ

$$(e^{iH_o'(t)} f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{i(\vec{x}|\vec{k})} e^{i\varepsilon(t)\frac{\alpha}{k}\log 4k^2|t|} \hat{f}(\vec{k})\, d\vec{k}$$

$$k = |\vec{k}|\ , \quad \varepsilon(t) = \begin{cases} +1 \text{ si } t > 0 \\ -1 \text{ si } t < 0 \end{cases} .$$

Alors :

$$W_{\pm}^{D}(H_\alpha, H_o) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_\alpha} e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} = \overline{\mathcal{F}_\alpha^{\pm}}\, \mathcal{F}_o .$$

Remarque :

Cette relation a été démontrée par Dollard pour n=3 .

Preuve :

Comme dans le théorème 1.7 il revient à calculer comment opère $\mathcal{F}_\alpha^{-}\, \overline{\mathcal{F}_o}$.

Soit $f \in \mathcal{C}$ ie $f \in \mathcal{S}$, $\hat{f}(\xi) = 0$ au voisinage de $\xi = 0$.

On a alors :

$$(\mathcal{F}_\alpha^{-}\, \overline{\mathcal{F}_o} f)(\vec{k}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon x}\, \overline{\phi^{-}(\vec{k},\vec{x})}\, (\overline{\mathcal{F}_o} f)(\vec{x})\, d\vec{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon x}\, \overline{\phi^{-}(\vec{k},\vec{x})} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{y}|\vec{x})} f(\vec{y})\, d\vec{y} \right) d\vec{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y})\, d\vec{y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon x}\, e^{i(\vec{y}|\vec{x})}\, \overline{\phi^{-}(\vec{k},\vec{x})}\, d\vec{x}$$

Posons :

$$\hat{\phi}^{-}_{\varepsilon}(\vec{k},\vec{y}) = (\tfrac{1}{2\Pi})^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{-}(\vec{k},\vec{x})\, e^{i(\vec{y}|\vec{x})}\, e^{-\varepsilon x}\, d\vec{x}$$

On a :

Lemme-1.2

$$\hat{\phi}^{-}_{\varepsilon}(\vec{k},\vec{y}) = \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{(2\Pi)^{\frac{n+1}{2}}}\, \Gamma(\tfrac{n-1}{2} + i\alpha/k) - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left\{ \frac{((\varepsilon+ik)^2+y^2)^{+i\alpha/k}}{(\varepsilon^2+|\vec{k}-\vec{y}|^2)^{i\alpha/k+\frac{n-1}{2}}} \right\}$$

Preuve :

Rappelons que

$$\phi^{-}(\vec{x},\vec{k}) = \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{(2\Pi)^{n/2}}\, \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2} - i\alpha/k)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\, e^{i(\vec{x}|\vec{k})}\, {}_1{}_1F(i\alpha/k;\, \tfrac{n-1}{2}\, ;\, i(kx - \vec{k}|\vec{x}))$$

Donc

$$\hat{\phi}_{\varepsilon}(\vec{k},\vec{y}) = \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{(2\Pi)^{n}}\, \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2} + i\alpha/k)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int e^{-\varepsilon x}\, e^{i(\vec{x}|\vec{y}-\vec{k})}\, {}_1{}_1F(-i\alpha/k;\tfrac{n-1}{2};-i(kx-\vec{k}|\vec{x}))\, d\vec{x}$$

On va calculer l'intégrale :

$$U_{\varepsilon}(\vec{k},\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon x}\, e^{-i(\vec{x}|\vec{k}-\vec{y})}\, {}_1{}_1F(-i\alpha/k;\, \tfrac{n-1}{2}\, ;\, -i(kx - (\vec{k}|\vec{x}))\, \frac{d\vec{x}}{x}$$

Prenons comme base dans $\mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1$ porté par $\vec{k}$, $\vec{e}_2$ porté par le plan engendré par $\vec{k}$ et $\vec{k}-\vec{y}$, orthogonal à $\vec{e}_1$, et on complète par $\vec{e}_3, \vec{e}_4, .., \vec{e}_n$

Posons alors :

$$\ell_1 = (\frac{\vec{k}|\vec{k}-\vec{y}}{k}) \quad , \quad \ell_2 = (\vec{e}_2 \mid \vec{k}-\vec{y})$$

Donc

$$U_\varepsilon(\vec{k},\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon x}\, e^{-i(x_1\ell_1+x_2\ell_2)}\, {}_1\!\!1\!\!F_1(-i\alpha/k;\ \tfrac{n-1}{2};\ -i(kx - kx_1))\ \frac{d\vec{x}}{x}$$

Posons

$$x_1 = \frac{u-v}{2}\ ,\ x_2 = \sqrt{uv}\ \cos\phi_1, \ldots \qquad x_n = \sqrt{uv}\ \sin\phi_1\ \sin\phi_2\ \ldots\ \sin\phi_{n-2}$$

$$0 \leqslant u < +\infty\ ,\ 0 \leqslant v < +\infty\ ,\ 0 \leqslant \phi_i \leqslant \Pi \quad 1 \leqslant i \leqslant n-3\ ;\quad 0 \leqslant \phi_{n-2} < 2\Pi\ .$$

Comme

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}{D(u,v,\phi_1 \ldots \phi_{n-2})} = \frac{u+v}{\sqrt{uv}}\ \frac{1}{4}\ (uv)^{\frac{n-2}{2}}\ (\sin\phi_1)^{n-3} \ldots \sin\phi_{n-3}$$

On a donc : $x = \frac{u+v}{2}$, $x_1 = \frac{u-v}{2}$, $x_2 = \sqrt{uv}\cos\phi_1$

$$V_\varepsilon(\vec{k},\vec{y}) = \int_0^{2\Pi} d\phi_{n-2} \int_0^{\Pi} \cdots \int_0^{\Pi} d\phi_1 \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dv \quad \{\ \}$$

$$e^{-\varepsilon(\frac{u+v}{2})}\ e^{-i(\frac{u-v}{2}\ell_1+\ell_2\sqrt{uv}\cos\phi_1)}\ {}_1\!\!1\!\!F_1(-i\alpha/k;\ \tfrac{n-1}{2}\ ;\ ikv)$$

L'intégration par rapport à $\phi_{n-2} \ldots \phi_2$, donne :

$$\int_0^{2\Pi} d\phi_{n-2} \ldots \int_0^{\Pi} d\phi_{n-3} \int_0^{\Pi} d\phi_2 (\sin\phi_2)^{n-4} \ldots (\sin\phi_{n-3}) = A(S_{n-3}) = \frac{2\Pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}$$

D'autre part

$$\int_0^{\Pi} (\sin\phi_1)^{n-3}\ e^{-i(\sqrt{uv})\ell_2\cos\phi_1}\ d\phi_1 = \Gamma(1/2)\ \Gamma(\tfrac{n-2}{2})\ (\frac{-\ell_2\sqrt{uv}}{2})^{-\frac{n-3}{2}}\ J_{\frac{n-3}{2}}(-\ell_2\ uv) \quad [36]$$

D'où

$$V_\varepsilon(\vec{k},\vec{y}) = \frac{\Pi^{\frac{n-1}{2}}}{2} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} dv\ (uv)^{\frac{n-3}{4}} \left(\frac{-\ell_2}{2}\right)^{-\frac{n-3}{2}} e^{-\varepsilon(\frac{u+v}{2})-i(\frac{u-v}{2})\ell_1} \{ \quad \}$$

où $\{ \quad \} = {}_1F_1(-i\alpha/k\ ;\ \frac{n-1}{2}\ ;\ -ikv)\ \frac{J_{n-3}}{2}(-\ell_2\sqrt{uv})$

Posant $\beta = \dfrac{\varepsilon + i\ell_1}{2}$

$\alpha = -\ell_2\sqrt{v}$

et tenant compte de la relation [36]

$$\int_0^{+\infty} u^{\nu/2}\ e^{-\beta u}\ J_\nu(\alpha\ u) = 2\alpha^\nu\ (2\beta)^{-\nu-1}\ e^{-\alpha^2/4\beta}\ .$$

On a :

$$V_\varepsilon(\vec{k},\vec{y}) = \Pi^{\frac{n-1}{2}}\ (\varepsilon+i\ell_1)^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^{+\infty} (v/2)^{\frac{n-3}{2}}\ e^{-\frac{\ell_2^2\, v}{2(\varepsilon+i\ell_1)} - \frac{(\varepsilon-i\ell_1)}{2}v}\ {}_1F_1(-i\alpha/k;\ \tfrac{n-1}{2};\ -ikv)\ dv$$

En rappelant que :

$(\vec{k} - \vec{y}) = \ell_1\vec{e}_1 + \ell_2\vec{e}_2$, donc $|\vec{k}-\vec{u}|^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2$, et $k\ell_1 = (\vec{k}|\vec{k} - \vec{y})$

et que : [36]

$$\int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}\ e^{-zt}\ {}_1F_1(a;\ \lambda;\ \sigma t)dt = \Gamma(\lambda)\ z^{-\lambda}\ (1 - \sigma/z)^{-a}$$

$$\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, \sigma\ ,\quad |z| > |\sigma|\ ,\quad \mathrm{Re}\, \lambda > 0$$

On obtient :

$$V_\varepsilon(\vec{k},\vec{y}) = 2\Pi^{\frac{n-1}{2}}\ \Gamma(\tfrac{n-1}{2})\ (\varepsilon^2 + |\vec{k}-\vec{y}|^2)^{-\frac{n-1}{2}}\ \left(\frac{(\varepsilon+ik)^2 + |y|^2}{\varepsilon^2 + |\vec{k}-\vec{y}|^2}\right)^{i\alpha/k}$$

en appliquant l'intégrale, ci-dessus avec :

$$\lambda = \frac{n-1}{2} \quad ; \quad a = -i\alpha/k \; ; \quad \sigma = -ik \quad ; \quad z = \frac{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \varepsilon^2}{2(\varepsilon + i\ell_1)}$$

Par suite, on a l'expression de $\hat{\phi}_\varepsilon^-(\vec{k},\vec{y})$ en dérivant par rapport à ε, la fonction V_ε (à une constante près) .

Lemme 1.3 $\quad n > 2$

$$\hat{\phi}_\varepsilon^-(\vec{k},\vec{y}) = \frac{(uk)}{n-2}^{-\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{2\Pi^{n/2}} \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+n-2)\, C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\, e^{i\delta_\ell(k)}\, W_{2\ell+n-2}(k,y,\varepsilon)$$

$$W_{2\ell+n-2}(k,y,\varepsilon) = \frac{e^{\Pi\alpha/2k}}{2\Pi} \left(\frac{|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} \pm i\alpha/k)|\,\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(2\ell + n-1)}\right) - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,'\{\quad\}$$

$$\text{où} \quad \{\quad\} = \left(\frac{4ky}{(\varepsilon^2+(y+k)^2)}\right)^{\ell+\frac{n-1}{2}} \left(\frac{-i\varepsilon+y-k}{-i\varepsilon+y+k}\right)^{-i\alpha/k} {}_2F_1\left(\ell+\frac{n-1}{2} - i\alpha/k;\ell+\frac{n-1}{2};2\ell+n-1;\frac{4ky}{\varepsilon^2+(y+k)^2}\right)$$

$$\cos\theta = \left(\frac{\vec{y}\,\vec{k}}{yk}\right)$$

Remarque - $n=2$ il faut adopter la formule comme nous l'avons déjà effectué

Preuve : Il revient au même de montrer que

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + i\alpha/k\right) \quad \frac{((\varepsilon + ik)^2 + u^2)^{i\alpha/k}}{(\varepsilon^2 + |\vec{k}-\vec{u}|^2)^{i\alpha/k + \frac{n-1}{2}}} =$$

$$\cdot\, \Pi^{-1/2}\, 2^{\frac{n-3}{2}}\, \Gamma(n/2) \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+n-2)\, C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\, \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + i\alpha/k)\,\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2})}{\Gamma(2\ell + n-1)} \quad \{\quad\}$$

$$\{\quad\} = \left(\frac{4ku}{\varepsilon^2+(u+k)^2}\right)^{\ell+\frac{n-1}{2}} \left(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k}\right)^{-i\alpha/k} {}_2F_1\left(\ell+\frac{n-1}{2} - i\alpha/k;\ell+\frac{n-1}{2};2\ell+n-1;\frac{4ku}{\varepsilon^2+(u+k)^2}\right)$$

Nous utilisons la représentation de la fonction hypergéométrique à l'aide de la fonction de Whittaker $\mathcal{W}_{K,\mu}$, de la façon suivante :

$$F_{21}\left(\tfrac{1}{2}+\mu-K\,;\,\tfrac{1}{2}+\mu+\gamma\,;\,1+2\mu\,;\,\frac{2\beta}{\beta+2z}\right)=$$

$$\frac{\beta^{-(\mu+1/2)}\,(z+\beta/2)^{\mu+1/2+\gamma}}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\gamma)}\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,t^{\gamma-1}\,\mathcal{M}_{K,\mu}(\beta t)\,dt$$

En posant $\mu=\ell+\frac{n-2}{2}$; $K=i\alpha/k$; $\gamma=0$; $\beta=2uk$; $z=\frac{\varepsilon^2+u^2+k^2}{2}$

on peut exprimer :

$$\{\qquad\}=\left(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k}\right)^{-i\alpha/k}\frac{1}{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2})}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\varepsilon^2+u^2+k^2}{2}\right)t}\,t^{-1}\mathcal{M}_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(2ukt)\,dt$$

D'autre part, d'après [9], on a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+n-2)\,\frac{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2}+i\alpha/k)}{\Gamma(2\ell+n-1)}\,C_\ell^{\frac{n-2}{2}}\,\mathcal{M}_{i\alpha/k,\ell+\frac{n-2}{2}}(2ukt)=$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+i\alpha/k)}{\Gamma(n-2)}(\sin\theta/2)^{-\frac{n-1}{2}}(2ukt)^{\frac{n-1}{4}}e^{uktcos^2\theta/2}\,\mathcal{M}_{i\alpha/k+\frac{n-1}{4};\frac{n-3}{4}}(2ukt(\sin^2\theta/2))$$

Il est facile de justifier l'intervertion de Σ et $\int$ comme nous l'avons fait dans la démonstration des propositions1.3 et1.5, et par suite la série donnée est égale à :

$$\left(\frac{\mu k}{2}\right)^{-\frac{n-1}{4}}2^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma(n/2)}{n-2}\left(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k}\right)^{-i\alpha/k}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2}+i\alpha/k)}{\Gamma(n-2)}(\sin\theta/2)^{-\frac{n-1}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-zt}\,t^{\gamma-1}\mathcal{M}_{K,\mu}(\beta t)dt$$

où $\quad z=\frac{\varepsilon^2+u^2+k^2-2uk\cos^2\theta/2}{2}$; $\gamma=-1+\frac{n-1}{4}$; $K=\frac{n-1}{4}+i\alpha/k$

$\mu=\frac{n-3}{4}$.

En utilisant encore une fois la représentation de la fonction hypergéométrique, l'expression ci-dessus est égale à

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + i\alpha/k\right) \left(\frac{-i\varepsilon+u-k}{-i\varepsilon+u+k}\right)^{-i\alpha/k} \left(\varepsilon^2 + |\vec{u} - \vec{k}|^2\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$F_{21}\left(-i\alpha/k\ ;\ \frac{n-1}{2}\ ;\ \frac{n-1}{2}\ ;\ \frac{4uk\ \sin^2\theta/2}{|\vec{u} - \vec{k}|^2}\right)$$

or

$$F_{21}(a; b; b; z) = (1-z)^{-a}$$

D'où, en définitive, cette série est égale à

$$\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + i\alpha/k\right) \frac{\left((\varepsilon+ik)^2 + u^2\right)^{i\alpha/k}}{\left(\varepsilon^2 + |\vec{u} - \vec{k}|^2\right)^{i\alpha/k + \frac{n-1}{2}}}$$

en montrant que

$$\left(\frac{-i\varepsilon + u - k}{-i\varepsilon + u + k}\right)^{-i\alpha/k} \left(\varepsilon^2 + |\vec{u} - \vec{k}|^2 - 4uk\ \sin^2\theta/2\right)^{i\alpha/k} =$$

$$\left((\varepsilon + ik)^2 + u^2\right)^{i\alpha/k}$$

Fin de la preuve du théorème 1.8

Comme dans le théorème 1.7 il suffit de montrer que :

$$(1)\quad \lim_{t \to -\infty} \lim_{\varepsilon \to o} e^{itk^2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_\varepsilon(\vec{k},\vec{y})\ e^{-i(ty^2 + \alpha/y \log(4y^2|t|))}\ \hat{f}(y)\, dy$$

$= \hat{f}(k)$, lorsque f parcourt un ensemble dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considérons les éléments f du type :

$$f(\vec{\xi}) = \sum_{l,m} \xi^{-\frac{n-1}{2}}\ a_{l,m}(\xi)\ Y_{l,m}\left(\frac{\vec{\xi}}{\xi}\right)$$

où $(\alpha_{\ell,m})$ est une famille de fonctions nulle sauf un nombre fini qui sont dans $L^2(R_+) \cap \mathcal{S}(R_+)$, ayant une transformée de Hankel (c'est-à-dire avec $\alpha=o$), nulle au voisinage de 0.

On sait [36] que :

$$e^{i(\vec{y}|\vec{\xi})} = (\xi\, y)^{-\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{n-4}{2}}\, \Gamma(\tfrac{n-2}{2}) \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+n-2)\, C_\ell^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)\, i^\ell\, J_{\ell+\frac{n-2}{2}}(y\,\xi)$$

où $\cos\theta = (\vec{y}|\vec{\xi})$

On peut écrire encore cette relation

$$e^{i(\vec{y}|\vec{\xi})} = (\xi\, y)^{-\frac{n-2}{2}}\, (2\Pi)^{n/2} \sum_{\ell}\sum_{m} Y_m^\ell(\tfrac{\vec{y}}{y})\, i^\ell\, J_{\ell+\frac{n-2}{2}}(y\,\xi)\,.$$

Par suite, on a ; si $f(\xi) = \xi^{-\frac{n-1}{2}}\, \alpha_{\ell,m}(\xi)\, Y_{\ell,m}(\tfrac{\vec{\xi}}{\xi})$

$$\hat{f}(y) = (\tfrac{1}{2\Pi})^{n/2} \int_{R^n} e^{i(\vec{y}|\vec{\xi})}\, f(\vec{\xi})\, d\vec{\xi}$$

$$= i^\ell\, y^{-\frac{n-1}{2}} \left(\int_o^{+\infty} (y\xi)^{1/2}\, f(\xi)\, J_{\ell+\frac{n-2}{2}}(y\xi)\, d\xi\right) Y_m^\ell(\tfrac{\vec{y}}{y})$$

$$= i^\ell\, y^{-\frac{n-1}{2}}\, (\mathcal{F}_o f)(y)\, Y_m^\ell(\tfrac{\vec{y}}{y})$$

d'après la remarque suivant le théorème 1.4.

D'autre part, en écrivant (1), avec une intégration en coordonnées sphériques, on obtient :

$$\lim_{t\to-\infty}\ \lim_{\varepsilon\to o}\ e^{itk^2} \int_o^{+\infty} dy\, e^{-i(ty^2 + \alpha/y \log 4y^2|t|)}\, (\mathcal{F}_o f)(y)\, i$$

avec $\{\ \} = y^{\frac{n-1}{2}} \int_{S^{n-1}} i^{\ell}\ \hat{\phi}_{\varepsilon}(\vec{k},\vec{y})\ \ Y_{\ell,m}\left(\frac{\vec{y}}{y}\right) d\omega\left(\frac{\vec{y}}{y}\right)$

Mais d'après le lemme 1.3 on a :

$$\hat{\phi}_{\varepsilon}(k,y) = (yk)^{-\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell}\sum_{m} Y_m^{\ell}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) H_{\ell}(k,y,\varepsilon)$$

donc l'intégrale donnée est égale à

$$i^{\ell}\, k^{-\frac{n-1}{2}}\, e^{i\delta_{\ell}(k)} \lim_{t\to\infty}\ \lim_{\varepsilon\to o} \int e^{-i(ty^2+\alpha/y\ \log 4y^2|t|} (\mathcal{F}_o f)(y) H_{\ell}(k,y,\varepsilon)\ d$$

Mais d'après le théorème 1.7, la limite de l'intégrale n'est autre que

$$e^{-i\delta_{\ell}(k)}\ (\mathcal{F}_o f)\ (k)$$

Par suite, d'après le calcul de la transformée de Fourier effectué ci-dessus, l'expression totale cherchée est égale à $\hat{f}(\vec{k})$ c.q.f.d.

3.2 - Généralisation du théorème de JM COOK - S.T. KURODA

Nous avons que l'opérateur $H = H_{\alpha} + p$, où p satisfait les hypothèses (i) (ii) de la proposition 1.2, est auto-adjoint. Désignons par E_{α} la mesure spectrale de H_{α}. Nous avons alors:

Théorème 1.9

Les opérateurs d'ondes

$$W_{\pm}(H_{\alpha}, H) = \lim_{t\to\pm\alpha} e^{itH}\, e^{-itH_{\alpha}}\ E_{\alpha}(R^{+})$$

existent dès que p satisfait (3.1)

Preuve :

on va considérer le cas où $t \to +\infty$. Posons

$$W(t) = e^{itH}\ e^{-itH_{\alpha}}\ E_{\alpha}(]o, +\infty[)\ ,\ \text{où}\ \ t > 1$$

Ecrivons :

$$W(t) = \underbrace{e^{itH}\ e^{-itH_o}}_{W_1(t)}\ e^{iH_o'(t)}\ \ \underbrace{e^{itH_o}\ e^{-itH_o'(t)}\ e^{-itH_{\alpha}}}_{W_2(t)} E_{\alpha}(]o, +\infty[)$$

où $e^{iH_o'(t)}$ est la famille d'opérateurs unitaires introduits dans le théorème 1.8.

Nous savons d'après [2] , que $\lim_{t \to \pm \infty} W_2(t)$ existe et nous avons exprimé cette limite dans le théorème 1.8

Il suffit de montrer que $\lim_{t \to \pm \infty} W_1(t)$ existe sous les hypothèses données .

La technique habituelle consiste à trouver un ensemble $\mathcal{E}$ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\lim_{t \to +\infty} W_1(t)f$ existe dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$

Par suite, comme $W_1(t)$ est une famille d'opérateurs isométriques, le théorème de Banach-Steinhauss, implique l'existence de la limite pour to $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Une condition nécessaire d'existence de la limite, est par exemple de prouver que ;

$$\int_{t_o}^{+\infty} \left\| \frac{d}{dt} W_1(t) f \right\| dt < \infty$$

pour un certain $t_o > o$. On va choisir $\mathcal{E}$ de façon à vérifier la relation ci-dessus.

Posons :

$$\mathcal{E} = f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) , \quad \hat{f}(\xi) = o \text{ au voisinage de } \xi = o$$

Il est clair que $\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, comme

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{H_o}}\right) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

On a bien $\mathcal{E} \subset D\left(\frac{1}{\sqrt{H_o}}\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{H_o}} \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$. Par suite si $f \in \mathcal{E}$ la fonction $t \to e^{-i\alpha/\sqrt{H_o}} \log(4 + H_o) f$ est dérivable, et sa dérivée e égale à :

$$\frac{-i\alpha}{t\sqrt{H_o}} e^{-i\alpha/\sqrt{H_o}\,\log(4\,t\,H_o)} \quad f = e^{-i\alpha/\sqrt{H_o}\,\log(4t\,H_o)} \left(\frac{-i\alpha}{t\sqrt{H_o}} f\right) .$$

En effet, si $f \in \mathcal{E}$, supp $\hat{f} \subset \{\xi : |\xi| \geq \varepsilon\}$, et $E(\lambda)$ est le projecteur spectral de $-\Delta = H_o$, on a

$$E(\lambda)\, f = o \quad \text{si} \quad \lambda < \varepsilon .$$

$$(E(\lambda)f)\,(x) = \int_{|\xi|^2 \leq \lambda} \hat{f}(\xi)\; e^{i\langle x|\xi\rangle}\; d\xi .$$

Donc

$$e^{-i\alpha/\sqrt{H_o}\,\log(4\,t\,H_o)}\, f = \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-i\alpha/\sqrt{\lambda}\log 4\,t\,\lambda}\; dE(\lambda)f .$$

Si on regarde les quotients intervenant dans la dérivée :

$$|F_h(t)| = \left|\frac{e^{-i\alpha/\sqrt{\lambda}\log 4(t_o+h)\lambda} - e^{i\alpha/\sqrt{\lambda}\log 4t_o\lambda}}{h}\right| \leq \left|\frac{\alpha}{(t_o+|h|\theta)\sqrt{\lambda}}\right| \leq \frac{2\,|\alpha|}{\sqrt{\varepsilon}\; t_o} \quad \text{si } \lambda \geq \varepsilon \text{ et } |h| \leq t_o/2$$

Par suite, on peut appliquer le théorème de Lebesgue pour les mesures spectrales, pour passer à la limite .

D'autre part, si $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $\frac{d}{dt}\, e^{itH} f$ (resp. $\frac{d}{dt}\, e^{-itH_o}$) est égal à $iH\, e^{itH}$ (resp. $-i\, H_o\, e^{-itH_o}$) .

Donc si $f \in \mathcal{E}$

$$\frac{d}{dt}\, W_1(t)f = i\, e^{itH} \left[-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}\right] e^{-itH_o}\; e^{iH_o'(t)}\; f$$

On va montrer que

$$\int_{t_o}^{+\infty} \| ie^{itH} \left[-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}} \right] e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f \| \, dt < +\infty$$

Observons que cette dernière quantité est aussi égale à

$$\int_{t_o}^{+\infty} \| \left(-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}} \right) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f \| \, dt \, .$$

Rappelons d'abord que :

Lemme 1.3: Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$(e^{-itH_o} f)(x) = \left(\frac{1}{4\pi i t}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) \, dy$$

Preuve : Soit $f \in \mathcal{S}$

$$(e^{-itH_o} f)\hat{}(\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$$

Donc

$$(e^{-itH_o} f)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{x}|\vec{\xi})} e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n} \lim_{\varepsilon \to o} \int_{\mathbb{R}^n} dy \, f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varepsilon|\xi|^2 + i(x|\xi) - it|\xi|^2 - i(\xi|y)} \, d\xi$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \lim_{\varepsilon \to o} \int_{\mathbb{R}^n} dy \, f(y) \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon u^2 + i(x_j - y_j)u - it u^2} \, du \right)$$

Or l'intégrale entre ( ) est égale à

$$\left(\frac{\Pi}{\varepsilon + it}\right)^{1/2} \quad e^{\frac{(x_j - y_j)^2}{4(\varepsilon + it)}}$$

Donc

$$(e^{-itH_o} f)(x) = \left(\frac{1}{2\Pi}\right)^n \lim_{\varepsilon \to o} \left(\frac{\Pi}{\varepsilon+it}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(\varepsilon+it)}} f(y)\, dy$$

Comme $f \in \mathcal{S}$, on peut passer à la limite grâce au théorème de Lebesgue, et on obtient le lemme 1.3.

Lemme 1.4:

Soit $f \in \mathcal{C}$: $\forall$ le nombre réel $> o$, μ, il existe deux nombres réels positifs c et γ tel que :

$$(e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f)(x) = \left(\frac{1}{4\,\Pi\, it}\right)^{n/2} e^{-i\frac{|x|^2}{4t}} \hat{f}(x/2t)\, e^{\frac{i^2 \alpha t}{|x|} \log \frac{|x|^2}{t}} + R_f(x,t)$$

avec $$|R_f(x,t)| \leq \frac{c}{t} \quad \frac{(\log t)^\gamma}{\left[1 + \left(\frac{x}{2t}\right)^2\right]^\mu} .$$

Preuve : Posons pour $f \in \mathcal{C}$

$$g(x,t) = (e^{iH_o'(t)} f)(x) = \left(\frac{1}{2\Pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x|\xi\rangle} e^{i\alpha/|\xi|} \log(4\, t\, |\xi|^2)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Soit $\mu > o$, β un multi indice donné, alors il existe C et γ tq

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^\mu \, |D^\beta g(x,t)| \leq C(\log t)^\mu$$

On obtient cette majoration en intégrant par parties, en utilisant le fait que $\hat{f}$ est nulle lorsque $|\xi| \leq \varepsilon$. La dérivation introduit le terme $(\log t)$ autant de fois qu'on fait d'intégration parties. Enfin comme $\hat{f} \in \mathcal{S}$, on a

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^p |\hat{f}(\xi)| \leq C(f,p)$$

De là, il résulte que :

$$(e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f)(\vec{x}) = (\frac{1}{4\Pi it})^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|^2}{4t}} g(\vec{y},t)\, d\vec{y}$$

$$= (\frac{1}{4\Pi it})^{n/2} e^{-i\frac{|\vec{x}|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\frac{\vec{x}}{2t}|\vec{y})} e^{-i\frac{|y|^2}{4t}} g(\vec{y},t)\, d\vec{y}$$

$$= (\frac{1}{4\Pi it})^{n/2} e^{-i\frac{|\vec{x}|^2}{4t}} g(\frac{\vec{x}}{2t},t) + (\frac{1}{4\Pi it})^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\vec{x}/2t|\vec{y})} (e^{-\frac{|\vec{y}|^2}{4t}} - 1) g(\vec{y},t)\, dy$$

Comme $g(x,t) = (e^{iH_o'(t)} f)(\vec{x})$. On a bien :

$$\hat{g}(x/2t,t) = e^{i\alpha/\xi \log 4t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\Big|_{\xi = \frac{\vec{x}}{2t}} = e^{\frac{i2t}{x}\log\frac{x^2}{t}} \hat{f}(x/2t)$$

ce qui donne le premier terme . Posons :

$$R_f(x,y) = (\frac{1}{4\Pi it})^{n/2} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\vec{x}/2t|\vec{y}\rangle} (e^{-\frac{|\vec{y}|^2}{4t}} - 1)\, g(\vec{y},t)\, d\vec{y} \ .$$

Il faut montrer que, $\forall\, \mu$, il existe $C(f,\mu)$, $\gamma(f,\mu)$ tq

$$(1 + (x/2t)^2)^{\mu} \ R_f(x,t) \leq C\, |\log t|^{\gamma}$$

Il est clair que :

$$\left| e^{-i\frac{|y|^2}{4t}} - 1 \right| \leq \frac{|y|^2}{4t}$$

et que

$$\left|D^\beta \left(e^{-\frac{|y|^2}{4t}} - 1\right)\right| \leq \frac{C(\beta)}{t} \left(1 + |y|^2\right)^{\mu_1}$$

Si on multiplie l'intégrale ci-dessus par $(x/2t)^\mu$, et en intégrant par parties un certain nombre de fois, on aura à majorer un terme de la forme

$$\frac{C}{t} \sup \left(\left(1 + |y|^2\right) \left| D^\beta g(y,t) \right| \right.$$

et on a vu que ce terme admet une majoration du type $\frac{C(\log t)^\mu}{t}$ c.q.f.d.

Appliquons ce résultat à :

$$\left(-\frac{2\alpha}{|x|} + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}}\right) e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} f = \left\{-\frac{2\alpha}{|x|}\left[\phi(x)\hat{f}(x/2t) + R_{f'}(x,t)\right] \left(\frac{1}{4\pi it}\right)^{n/2}\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{t} e^{-itH_o} e^{iH_o'(t)} \left(\frac{1}{\sqrt{H_o}} f\right)\right\}$$

Explicitons le 2ème terme :

$$= \frac{\alpha}{t} \left(\phi(x) \hat{f}(x/2t) \frac{2t}{x} + R_{f'}(x,t)\right) \left(\frac{1}{4\pi it}\right)^{n/2}$$

$$= \frac{2\alpha}{x} \left(\phi(x) \hat{f}(x/2t) + \frac{\alpha}{t} R_{f'}(x,t) \left(\frac{1}{4\pi it}\right)^{n/2}\right.$$

Les deux termes en $\frac{1}{|x|}$ se détruisent de sorte qu'il reste :

$$-\frac{2\alpha}{|x|} R_f(x,t) + \frac{\alpha}{t} R_{f'}(x,t) + p(x) \left[\phi(x) \hat{f}(x/2t) + R_f(x,t)\right] .$$

Comme $f \in \mathcal{C}$, $\forall \mu$, $\exists C$ tq

$$\sup_{x,t} \; (1 + (\frac{x}{2t})^2)^{\mu} \; |\hat{f}(x/2t)| \leq C$$

(Rappelons que f appartient à $\mathcal{C}$, $\hat{f}(\xi) = o$ si $|\xi| \leq \varepsilon(f)$)

Posons , alors

$$2\mu = (\frac{n}{2} - 1) - \varepsilon > o \quad , \quad o < \varepsilon < 1/2$$

Alors

$$\left\| \frac{1}{(2t)^{1+\varepsilon}} \; \frac{p(x)}{(1 + |x|)^{(\frac{n}{2} - 1) - \varepsilon}} \; \frac{(1 + |x|)^{(\frac{n}{2} - 1) - \varepsilon}}{(2t)^{\frac{n}{2} - 1 - \varepsilon}} \; \hat{f}(x/2t) \right\|$$

$$\leq \frac{C}{t^{1+\varepsilon}} \left\| \frac{p(x)}{(1 + |x|)^{\frac{n}{2} - 1 - \varepsilon}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

On obtient une majoration du même type avec $R_{f'}$ et R_f car on gagne un t au dénominateur avec seulement une certaine puissance de $|\log t|$, au numérateur . c.q.f.d.

Chapitre 2

Généralisation du théorème d'unicité de T. KATO.

Introduction

T. Kato a étudié dans ([28] (2)) les solutions u dans $H^2_{loc}(\Omega)$, où Ω est un ouvert contenant l'exterieur d'une certaine sphère dans R^n, de l'équation de Schroedinger

(1) $\quad (- \Delta + p(x) - k^2)\ u\ (x) = 0$

Le potentiel p est soumis à la condition:

(2) $\quad p(x) = 0\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}} \right)$, $\varepsilon > 0$ fixe.

Il a obtenu, alors, pour ses solutions, le comportement asymptotique suivant:

(3) $\quad \underset{R \to \infty}{\overline{\lim}} \int_{R < |x| < R+b} |u(x)|^2\, dx > 0 \qquad b$ fixe.

Ce théorème a été un élément technique fondamental dans l'étude spectrale de l'opérateur de Schrodinger car il permet d'éliminer les valeurs propres positives ainsi que le spectre continu singulier.

Une généralisation du théorème de T.Kato, aux potentiels à longue portée a été donnée par S. AGMON et B. SIMON. Mais cette amélioration permet d'éliminer les valeurs propres positives pour ces opérateurs mais ne permet pas de conclure sur le spectre continu singulier. La généralisation complète que nous donnons dans ce chapitre répond simultanement aux deux questions. Ce théorème sera d'une importance capitale pour l'étude faite au chapitre 4.

Théorème 2.1

Sout $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ telle que

(4) $\quad \Delta u + (k^2 + q(x) - p(x))\ u(x)$ est à support compact, où:

(1) q est une foction continue réelle dans $|x| > R_o$, possèdant une dérivée q' par rapport à $|x| = r$, continue, telle que

(i) $\quad \lim_{r \to \infty} 4\, q\, (r)^* < k^2$

(ii) $\lim_{r \to \infty} 4\, r (q')^{*}(r) < k^2$

(iii) $\int_{R_o}^{+\infty} (q')^{*}(r)\, dr < +\infty$

(2) p est une fonction mesurable, à valeurs complexes, satisfaisant

(i) $\lim_{r \to \infty} 2r\, p^{*}(r) < k$

(ii) $\int_{R_o} p^{*}(r)\, dr < +\infty \qquad (h^{*}(r) = \sup_{|x| = r} |h(x)|)$

Alors si u n'est pas à support compact, on a

(3) $\lim_{R \to \infty} \inf \int_{R<|x|<R+b} |u(x)|^2\, dx > 0 \qquad b > 0$ fixé.

Avant d'entamer la démonstration du théorème, nous introduisons quelques notations.

Soit u(x) une fonction de $H^2_{loc}(\Omega)$ satisfaisant (4). Nous pouvons supposer que $u \in C^2(\Omega)$. En effet, on peut ensuite étudier le résultat fondamental où $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ en utilisant la technique de P.Alshom et G. Schmidt [3].

On pose : $x = r\xi$, où $r \in R^+$, $\xi \in S^{n-1}$

En tant que fonction de r, la fonction u s'interprète comme une fonction de R^+ dans $L^2(S^{n-1})$. On pose $u'(r) = \frac{\partial}{\partial r} u(r\xi)$.

On désigne par A l'opérateur de Laplace Beltrami sur S^{n-1}.

Avec cette convention, l'équation (4) devient:

(5) $u''(r) + \frac{n-1}{2} - \frac{1}{r^2} (Au)\ (r) + \left[r^2 + Q(r) - P(r)\right] u(r) = 0$

où S(Q) sont les opérateurs dans $L^2(S^{n-1})$ définis par:

(6) $(Pv)(\xi) = p(r\xi)\, v(\xi)$ ($(Qv)(\xi) = q(r\xi) v(\xi)$)

On fait successivement les changementsde variable

(7) $u(r) = r^{-\frac{n-1}{2}}\, v(r)$

(8) $\qquad v(r) = r^{-m}\, v_m(r)$

Cela nous conduit successivement aux équations differentielles.

(9) $\qquad v''(r) - \frac{1}{r^2}\,(Au)(r) + \left[k^2 + Q(r) - P_1(r)\right] v(r) = 0$

(10) $\qquad v''(r) - \frac{2m}{r}\, v'_m(r) + \frac{(m(m+1)-A)}{r^2}\, v_m(r) + (k^2 + Q(r) - P_1(r))\, v_m(r)$

où $P_1(r) = P(r) + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\frac{1}{r^2}$

L'essentiel de la démonstration consiste en un certain nombre de propriétés de la fonction F(m, t, r) suivante:

(11) $\qquad F(m,t,r) = ||v_m(r)||^2 + \left[k^2 - \frac{2kt}{r} + \frac{m(m+1)}{r^2}\right] ||v_m(r)|| + ((Q(r) - \frac{A}{r^2})v_m | v_m(r$

Le produit scalaire est celui de $L^2(S^{n-1})$.

Observons qu'il existe, par hypothèse, un nombre $R_1 > 0$ tel que

$$k^2 - (q^*(r) + r\,(q')^*(r)) > k^2/2 \text{ si } r > R_1 > R_o$$

Nous avons alors:

Lemme 2.1

Soit t_o un nombre réel: $0 < t_o < \frac{kR_1}{2}$

Il existe $m_1 > 0$ t.q.

$$\frac{d}{dr}\,(r^2 F(m,t_o,r)) > 0 \quad , \quad m > m_1 \quad , \quad r > R_1$$

Preuve :

On a

$$\frac{d}{dr}\,(r^2 F(m,t,r)) = 2r\,\{(2m+1)\,||v'_m||^2 + ((rP_1(r) - 2kt)v_m | v'_m)$$
$$+ ((Q + \frac{rQ'}{2})v_m) + ((k^2 - \frac{kt}{r})\,||v_m||^2)\}$$

obtenu en effectuant la dérivation et en remplaçant v'' par son expression dans l'équation différentielle qu'elle vérifie .

Supposons $t \geq o$, alors

$$\mathcal{R}e\ ((rP_1(r) - 2kt)v_m | v_m') \geq - (rp_1^*(r) + 2kt)\ ||v_m||\ ||v_m'||$$

$$((Q + \frac{rQ'}{2})\ v_m | v_m) \geq - (q^* + \frac{rq'^*}{2})\ ||v_m||^2$$

Donc

$$\frac{d}{dr}\ (r^2\ F(m,t,r)) \geq 2r\ ((2m+1)\ ||v_m'||^2 - (rp_1^*(r) + 2kt)\ ||v_m||\ ||v_m||$$

$$+ (k^2 - \frac{kt}{r} - (q\ (r) + \frac{rq'^*(r)}{2}))\ ||v_m||^2$$

Par conséquent, le lemme est démontré si $m \geq o$ et si

$$|rp_1^*(r) + 2kt|^2 \leq 4(2m+1)\ (k^2 - \frac{kt}{r} - (q^*(r) + \frac{rq'(r)^*}{2}) .$$

Le membre de gauche est borné par hypothèse sur p, et la condition sur t . Par ailleurs si $(2m+1)$ est $> o$, on peut rendre le terme de droite aussi grand que l'on veut lorsque $m \to \infty$, donc à partir $m \geq m_1$.

Si $r \geq R_1$, $\quad k^2 - (q^* + \frac{rq'(r)^*}{2}) > k^2/2$

Donc $\quad (k^2 - \frac{kt_o}{r} - (q^*(r) + \frac{rq'(r)^*}{2})) > (k^2/2 - \frac{kt_o}{r}) > o \quad r \geq R_1$ c.q.f.d.

Lemme 2.2

Il existe $m_o \geq o$, et $R_2 \geq R_1$ tel que

$$F(m_o, t_o, r) > o \qquad r \geq R_2$$

Preuve :

En tenant compte de la relation $v_m(r) = r^m v(r)$, on a

$$F(m,t,r) = r^{2m} \{||v' + \frac{m}{2} v||^2 + (k^2 - \frac{2kt}{r} + \frac{m(m+1)}{r^2})||v||^2 + (Q(r)v|v) - \frac{1}{r^2}(Av|v)\}$$

Le support de v n'est pas borné: il existe $R_2 \geq R_1$ tel que $||v(R_2)|| > o$ (grâce au théorème de Fubini). Donc $\frac{m(m+1)}{R_2^2} ||v(R_2)|| \to \infty$ lorsque $m \to \infty$.

donc à partir d'un certain rang m_o , on peut dire que

$$F(m_o, t_o, R_2) > o .$$

D'autre part si $m_o \geq m_1$, $F(m_o, t_o, r)$ est croissante d'après le lemme précédent, dans l'intervalle $[r_1, +\infty[$, donc

$$F(m_o, t_o, r) > o \qquad r \geq R_2 .$$

Lemme 2.3 :

Supposons que $||v||^2$ n'est pas strictement croissante dans tout intervalle $[R, +\infty[$, alors il existe des valeurs arbitrairement grandes de r pour lesquelles $F(o, o, r) > o$

Preuve :

Soit $S = \{r \geq R_1$ tel que $\mathcal{R}e(v'|v) \leq o\}$. Comme $\frac{d}{dr}(||v||^2) = \mathcal{R}e(v'|v)$ l'hypothèse implique que S est non borné . D'autre part, si $r \in S$, on a

$$||v' + \frac{m}{2} v||^2 \leq ||v'||^2 + \frac{m^2}{r^2} ||v||^2$$

Donc :

$$F(m, t, r) \leq 2^m \{||v'||^2 + (k^2 - \frac{2kt}{r} + \frac{m(2m+1)}{r^2}) ||v||^2 + ((Q - \frac{1}{r^2}A) v|v)\}$$

D'après le lemme 2.2

$$F(m_o, t_o, r) > o \qquad \forall r \geq R_2$$

D'autre part

$$-\frac{2kt_o}{r} + \frac{m_o(2\,m_o + 1)}{r^2} \quad \text{devient négatif (pour } r \text{ assez grand)}$$

Par suite, si $r \in S$

$$o < ||v'||^2 + k^2\,||v||^2 + (Q(r)\,v|v) - \frac{1}{r^2}\,(Av|v) + M = F(o, o, r) + M$$

avec $M < 0$

Comme S est non borné, le lemme 2.3 est prouvé .

Lemme 2.4

Toujours sous les hypothèses (1) et (2) du théorème 4

$$\lim_{r \to \infty} \inf \; (||v'||^2 + k^2\,||v||^2 + (Qv|v)) > o$$

Preuve :

$$\frac{d}{dr}\,(F(o, o, r)) = 2\,\mathcal{R}e\,(v'' + k^2 v + Qv - \frac{1}{r^2}\,(Av|v')) + (Q'v|v) + \frac{2}{r^3}\,(Av|$$

En utilisant l'équation différentielle, satisfaite par v, on a :

$$\frac{d}{dr}\,F(o, o, r) = 2\,\mathcal{R}e(P_1(r)v|v') + (Q'v|v) + \frac{2}{r^3}\,(Av|v)$$

$$\geq -2||P_1(r)||\;||v||\;||v'|| - ||Q'(r)||\;||v||^2 + \frac{2}{r^3}\,(Av|v)$$

où

$$||P_1(r)|| = p_1^*(r) \qquad ||Q'(r)|| = q'(r)^* .$$

D'autre part,

$$2\, p_1^*(r)\, ||v||\, ||v'|| \leq \frac{2\, p_1^*(r)}{(k^2 - q^*(r))^{1/2}}\, ||v'||\, ((k^2 - q^*(r))^{1/2}\, ||v||$$

$$\leq \frac{p_1^*(r)}{(k^2 - q^*(r))^{1/2}} \{||v'||^2 + (k^2 - q^*(r))\, ||v||^2$$

$$\leq \frac{2\, p_1^* r)}{k} \{||v'||^2 + k^2\, ||v||^2 + (Qv|v)\}$$

et

$$(q')^*(r)\, ||v||^2 \leq \frac{q'(r)^*}{(k^2 - q^*(r))} \{(k^2 - q^*(r))\, ||v||^2 + ||v'||^2\}$$

$$\leq \frac{4q'^*(r)}{k^2} \{||v'||^2 + k^2\, ||v||^2 + (Qv|v)\}$$

D'où :

$$\frac{d}{dr}\,(F(o,\, o,\, r)) \geq -\frac{2\, p_1^*(r)}{k} \{||v'||^2 + k^2||v||^2 + (Qv|v) + \frac{1}{r^3}\,(Av|v)$$

$$-\frac{4q'^*(r)}{k^2} \{||v'||^2 + k^2||v||^2 + (Qv|v) + \frac{1}{r^3}\,(Av|v)$$

Comme :

$$\frac{2\, p_1^*(r)}{k} \quad \frac{1}{r^2}\,(Av|v) \leq \frac{1}{r^3}\,(Av|v)$$

$$\frac{4\, q'^*(r)}{k^2} \quad \frac{1}{r^2}\,(Av|v) \leq \frac{1}{r^3}\,(Av|v)$$

grâce aux hypothèses :

$$2r\, p_1^*(r) \leq k$$

$$4r\, q'^*(r) \leq k^2$$

On a donc :

$$\frac{d}{dr} F(o, o, r) \geq -h(r) \quad F(o, o, r)$$

où $h(r) = \frac{2p_1^*(r)}{k} + \frac{4\, q'(r)^*}{k^2} \geq o$.

L'inéquation différentielle entraîne :

$$F(o, o, s) \geq F(o, o, R) \exp \{- \int_R^s \left(\frac{2p_1^*(r)}{k} + \frac{4q'(r)^*}{k^2} \right) dr$$

Si $||v||^2$ est strictement croissante dans un intervalle $[R, +\infty[$ le résultat est assuré puisque $k^2||v||^2 + (Qv|v) > o$, $r > R_1$.

Sinon, on est dans les conditions du lemme 2.3 il existe $R_3 \geq R_2$ tel que :

$$F(o, o, R_3) > o$$

Donc

$$F(o, o, r) > F(o, o, R_3) \exp - \left(\int_{R_3}^{\infty} h(r)\, dr \right) = C > o .$$

puisque h est intégrable par hypothèses .

Lemme 2.5

Il existe $R_4 \geq R_3$ tel que

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(||v(r)||^2 \right) + 7k^2 ||v||^2 > C^2 > o \qquad \forall r \geq R_4$$

Preuve :

$$\frac{d^2}{dr^2} (||v||^2) = 2||v'||^2 + 2\,\mathrm{Re}(v'', v)$$

En tenant compte de l'équation différentielle satisfaite par v", on a

$$\frac{d^2}{dr^2}(||v||^2) = 2||v'||^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{r^2}Av + P_1(r)\,v(r) - ((k^2+Q)v|v)\right)$$

$$\geq ||v'||^2 + 2\left[\mathrm{Re}(P_1(r)\,v|v) - k^2||v||^2 - (Q(r)v|v)\right]$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(||v||^2) - ||v'||^2 + 2(Qv|v) + 3k^2||v||^2 \geq 2\,\mathrm{Re}(P_1(r)v|v) + k^2||v||^2$$

or d'après le lemme 2.4, il existe R_4 tel que

$$||v'||^2 + k^2(||v||^2 + (Qv|v) > c > o \quad \text{si} \quad r \geq R_4 \ .$$

D'autre part

$$k^2||v||^2 + 2\,\mathrm{Re}(P_1(r)v|v) \geq (k^2 - 2P_1(r))\,||v||^2 > o$$

Donc

$$\frac{d^2}{dr^2}(||v||^2) + 4k^2||v||^2 + 3(Qv|v) > C + k^2||v||^2 + 2\,\mathrm{Re}(P_1(r)v|v)$$

L'hypothèse $k^2 - q^*(r) > k^2/4$, implique $q^*(r) < \frac{3k^2}{4}$, pour $r \geq R_1$

Par suite

$$(Qv|v) \leq q^*(r)\,||v||^2 \Longrightarrow (Qv|v) \leq \frac{3k^2}{4}\,||v||^2$$

on obtient, finalement

$$\frac{d^2}{dr^2}(||v||^2) + (4 + 9/4)\,k^2\,||v||^2 \geq C > o \qquad \forall r \geq R_4$$

D'où le lemme 2.5

Pour arriver à la conclusion définitive du théorème, on n'a plus à opérer de changement dans la démonstration de KATO .

Lemme 2.6 (T.KATO)

Soit y une fonction réelle ≥ 0, satisfaisant:

$$y''(t) + k^2 y(t) \geq f(t) \qquad k > 0$$

où $f(t)$ non décroissante de t. Alors il existe une constante $h(b,k) > 0$ indépendante de f et de y.

$$\int_a^{a+b} y(t)\, dt \geq h\, f(a) \qquad a \geq 0 \qquad b > 0 \quad .$$

Conséquences : Il suffit de considérer la fonction $f(t) = C > 0$, et la fonction $y(\cdot) = ||v(\cdot)||^2$. Rappelons que:

$$||v||^2 = \int_{S^{n-1}} |v(\cdot,\xi)|^2\, d\omega(\xi) \quad . \quad \text{Donc}$$

$$\int_{R_o<|x|<R_o+b} |v(x)|^2\, dx = \int_{R_o}^{R_o+b} r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} |v(r,\xi)|^2\, d\omega(\xi) \right) dr$$

$$= \int_{R_o}^{R_o+b} r^{n-1}\, ||v(r)||^2 dr > h(b,k)\, C$$

CHAPITRE 3

Perturbation de l'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$

par des potentiels à symétrie sphérique.

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous donnons une application de la théorie de la diffusion
r le couple d'opérateurs (H_α, H) où $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ et $H_\alpha + q$. Le potentiel
st une fonction définie dans R_+, mesurable, à valeurs réelles satisfaisant la
dition :

$$(C.1) \qquad \int_0^1 r|q(r)|\,dr + \int_1^\infty |q(r)|\,dr < +\infty$$

Nous approximons ces potentiels par des potentiels plus réguliers sa-
faisant la condition :

$$(C.2) \qquad \int_0^1 r^2 q^2(r)\,dr + \int_1^\infty |q(r)|^p\,dr < \infty \qquad p = 1, 2$$

. Définition d'un opérateur auto-adjoint associé à $H_\alpha + q$
Existence des opérateurs d'ondes $W_\pm (H_\alpha , H_\alpha + q)$ Unitarité de la matrice S

Nous désignerons par, V, A, B les opérateurs non bornés de multiplica-
n dans $L^2(R_+)$ par les fonctions $q(.)$, $\varepsilon(.)|q(.)|^{1/2}$; $|q(.)|$ respectivement.
fonction $\varepsilon(r)$ vaut +1 si $q(r) > 0$, et -1 si $q(r)$ est <0,

Nous notons par A_α^ℓ l'opérateur introduit dans la définition 1.1.

Nous avons vu en particulier que le noyau $G_\alpha(k, s, t)$ de 1a resolvan-
$(A_\alpha^\ell - k^2)$ est

$$2) \qquad G_\alpha^\ell(k,s,t) = \frac{1}{(2ik)} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(2\ell + n - 1)} \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_<) \mathfrak{W}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr_>)$$

$\mathrm{Im}\, k > 0$, $r_< = \inf(s,t)$; $r_> = \sup(s,t)$

$$(1.3)\qquad G_\alpha^\ell(k,s,t) = \frac{1}{(-2ik)}\,\frac{\Gamma(\ell+\frac{n-1}{2}+\frac{i\alpha}{k})}{\Gamma(2\ell+n-1)}\,\mathcal{M}^{(2\ell+n-2)}_{-\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}\,W^{(2\ell+n-2)}_{-\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}$$

$\operatorname{Im} k^2 < o$ et $\operatorname{Im} k < o$

Nous désignerons par G^+ le noyau donné par (1.2) et par G^- le noyau donné par (1.3) .

1.1 - Estimations des normes des opérateurs $VR_\alpha^\ell(z)$, $AR_\alpha^\ell B$, dans $L^2(R^+)$

Nous désignons par K_α^+ , l'ensemble $\{k\in\mathbb{C} : o\le \operatorname{Arg} k\le \Pi/2, k\neq o, \frac{i\alpha}{\ell+p+\frac{n-1}{2}}, \ell\ge o, p\ge o\}$

Lemme 3.1

Soit $\operatorname{Im} k \ge o$, $\ell \ge o$, $n \ge 3$:

$$(i)\qquad \int_o^{+\infty}\int_o^{+\infty} |G_\alpha^\ell(k,s,t)|^2\, n(t)\, dt\, ds \le C(k)\int_o^{+\infty}\int_o^{+\infty} h(t)\left[\frac{2t}{(1+2|k|t)}\right]^\ell e^{-(\operatorname{Im} k)|t-s|} dt\, ds$$

$$(ii)\qquad \int_o^{+\infty}\int_o^{+\infty} |G_\alpha^\ell(k,s,t)|^2\, n(t)\, g(s) dt\, ds \le C(k)\iint_{R_+^2} h(t)g(s)\frac{4ts}{(1+2|k|s)(1+2|k|t)} e^{-(\operatorname{Im} k)|t-s|} dt ds$$

où $C(k)$ est une quantité bornée en dehors d'un voisinage de o dans K_α^+

Preuve :

Pour $\ell \ge o$ $n \ge 3$ nous avons les estimations :

$$(1.4)\qquad \left|\mathcal{M}_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\right| \le C(k)\, e^{(\operatorname{Im} k)r}\,\frac{(2|k|r)^\mu}{(1+2|k|r)^{\mu+\nu}}$$

$$(1.5)\qquad \left|W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikr)\right| \le C(k)\, e^{-(\operatorname{Im} k)r}\,\frac{(1+2|k|r)^{\mu+\nu-1}}{(2|k|r)^\mu - 1}$$

où $\nu = \frac{\alpha\ \mathrm{Im}k}{|k|^2}$, $\mu = \ell + \frac{n-3}{2}$ et $C(k)$ est une fonction (pas toujours la même), bornée en dehors d'un voisinage des points $\{k=o,\ k=\frac{i\alpha}{\ell+n-1+p}\ \ell>o\ p\geq o\}$ dans K_α^+ .

En tenant compte de la définition de G_α^ℓ pour $\mathrm{Im}\,k \geq o$,

$$\int_o^{+\infty} |G_\alpha^\ell(k,s,t)|^2\ h(t)dt\ ds \leq \frac{C(k)}{|k|^2} \left\{ \int_o^{+\infty} h(t) \left| w(t) \int_o^t m(s)\ ds + m(t) \int_t^\infty w(s)\ ds \right| dt \right. \text{ où}$$

$$) = e^{2(\mathrm{Im}k)t} \quad \frac{(2|k|t)}{(1+2|k|t)^{2(\mu+\nu)}} \qquad ; \qquad w(s) = e^{-2(\mathrm{Im}k)s} \frac{(1+2|k|s)^{2(\mu+\nu-1)}}{(2|k|s)^{2(u-1)}}$$

Comme la fonction $t \longrightarrow e^{(\mathrm{Im}k)t} \quad \frac{1}{(1+2|k|t)^{2\nu}}$

est croissante si $|k| > -\frac{4\alpha\ \mathrm{Im}\,k}{|k|^2}$ (en particulier si $|k| > 4|\alpha|$)

il est possible de majorer cette intégrale par :

$$\frac{C(k)}{|k|^2} \int_o^{+\infty} h(t)\ e^{-(\mathrm{Im}k)t} \left(\frac{2|k|t}{1+2|k|t}\right)^2 \int_o^t e^{(\mathrm{Im}k)s} ds + e^{(\mathrm{Im}k)t} \left(\frac{2|k|t}{1+2|k|t}\right)^\nu \int_t^\infty e^{-(\mathrm{Im}k)s} ds$$

ce qui établit (i)

Par ailleurs, en appliquant la même méthode; nous obtenons :

$$\int_o^{+\infty} \int_o^{+\infty} |G_\alpha(k,s,t)|^2 h(t)g(s)dt\ ds \leq \frac{C(k)}{|k|^2} \left\{ \int_o^{+\infty} h(t)\ e^{-(\mathrm{Im}k)t} \frac{(2|k|t)}{(1+2|k|t)} \int_o^t e^{(\mathrm{Im}k)s} \left(\frac{2|k|s}{1+2|k|s}\right) g(\right.$$

$$\left. + e^{(\mathrm{Im}k)t} \frac{(2|k|t)}{(1+2|k|t)} \int_t^\infty e^{-(\mathrm{Im}k)s} \left(\frac{2|k|s}{1+2|k|s}\right) g(s)ds \right) dt \Bigg]$$

ce qui établit (ii)

xistence d'une extension auto-adjointe associée à l'opérateur formel $H = H_\alpha + q$

Théorème :

1°. Sous la condition C.1, il existe une extension autoadjointe A^ℓ semi bornée inférieurement satisfaisant $(\overset{\ell}{A}u|u) = (A^\ell_\alpha u|u)+(q(.)u|u)\ \forall u\in D(\overset{\ell}{A})$

La résolvante de cet opérateur notée $R^\ell(z)$, satisfait à la relation $R^\ell(z) = R^\ell_\alpha(z) - [BR^\ell_\alpha(z)]^* (I + AR^\ell_\alpha(z)\ B)^{-1}\ AR^\ell_\alpha(z)$ $z \in \rho(A)$ où $R^\ell_\alpha(z)$ est la résolvante de A^ℓ_α ; BR^ℓ_α et AR^ℓ_α sont des opérateurs de type Hilbert-Schmidt , $\forall\, z \in \rho(A)$

2°. Sous la condition C.2, il existe une extension autoadjointe semi bornée inférieurement A^ℓ satisfaisant $D(A^\ell) = (A^\ell_\alpha)$

$$\overset{\ell}{A}u = A^\ell_\alpha u + q\,u \qquad u \in D(A^\ell_\alpha)$$

La résolvante de cet opérateur notée $R^\ell(z)$ satisfait :

$$R^\ell(z) = R^\ell_\alpha(z)$$

où VR^ℓ_α est un opérateur nucléaire .

Pour démontrer ce théorème, nous ferons appel aux propositions suivantes :

nt de démontrer ce théorème, nous en tirons la conséquence immédiate :

ollaire 3.1

ent pour $n \geq 3$

$) = \{u \in L^2(R^n)\quad u(2\xi) = \frac{}{r}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} u_{\ell,m}(r)\, Y_{\ell,m}(\xi) \in D(A^\ell_\alpha) \text{ (11)} \sum_{\ell,m} ||A^\ell_\alpha u_{\ell,m}|^2_{L^2(R+)} < \infty$

$)(r) = \frac{}{r}^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\ell,m} (A^\ell_\alpha\, u_{\ell,m})(r)_{\ell,m}(\xi)$

A^ℓ_α est l'opérateur adjoint dans $L^2(R^+)$; défini dans le 1° (rem. dans le 2°)

théorème 3.1, sous la condition C_1 (rem. C_2) sur q.

rs H, est un opérateur auto adjoint sur D(H) semi borné inférieurement,

isfaisant

$|u)_{L^2(R^n)} = (H_\alpha u)u)_{L^2(R^n)} + (q(.)n)u)_{L^2(R^n)} \qquad \forall\, u \in D(H)$

Rappelons :

Proposition 3.1: (Kato - Rellich)

Soit H_o un opérateur autoadjoint et V un opérateur symétrique tel que :

(i) $D(H_o) \subset D(V)$

(ii) $\exists\, a,b \quad o < a < 1 \;,\; b \geq o : ||V\phi|| \leq a\,||H_o\phi|| + b||\phi|| \quad \forall\, \phi \in D(H_o)$

Alors : $H = H_o + V$ défini dans $D(H_o)$ est autoadjoint et

$$R(z) = (H - z)^{-1} = (H_o - z)^{-1} - (H_o - z)^{-1}\, V(H - z)^{-1} \quad \forall\, z \in \rho(H)$$

Proposition 3.2: (Kato - Lions - Lax Milgram - Nelson)

Soit H_o un opérateur autoadjoint positif et $V_o(\phi,\psi)$ une forme bilinéaire symétrique telle que

(i) $Q(H_o) \subset Q(V_o)$

(ii) $\exists\, a_o b_o \quad o<a<1,\; b \geq o : |V_o(\phi,\psi)| < a_o(\phi, H_o\phi) + b_o(\phi|\phi) \quad \forall\, \phi \in Q(H_o)$

alors : la forme quadratique :

$\phi \longrightarrow (\phi|H_o\phi) + V_o(\phi,\phi)$ définie sur $Q(H_o)$ est associée à un opérateur autoadjoint qui est semi borné inférieurement.

Une démonstration de la proposition 3.1 est donnée dans [28] (Théorème 4.3. page 287) et celle de la proposition 3.2 dans [48] (Th. II.7. page 42)

Proposition 3.3

Soit H un opérateur autoadjoint, semi borné inférieurement : $(H\phi|\phi) \geq -\lambda(\phi|\phi)$, $\lambda \geq o$. Soit $V(\phi,\psi)$ une forme bilinéaire symétrique telle que :

(i) $\quad Q(H) \subset Q(V)$

(ii) $\quad \exists\, a,b \quad o<a<1 \ , \ b \geq o : |V(\phi,\phi)| < a\,(\phi|(H+\lambda)\phi) + b(\phi|\phi) \quad \forall \phi \in Q(H)$

Alors : la forme quadratique :

$$\phi \longrightarrow (\phi|H\phi) + V(\phi,\phi)$$

est la forme associée à un opérateur autoadjoint, semi borné inférieurement.

Preuve :

Posons $H_o = H + \lambda$

$V_o(\phi,\psi) = V(\phi,\psi) - (\lambda\phi|\psi)$, les hypothèses de la proposition 3.2 sont satisfaites avec $a_o = a$, $b_o = b + \lambda$. Par suite la forme quadratique : $\phi \to (\phi|H_o\phi) + V_o(\phi,\psi) = (\phi|H\phi) + V(\phi,\phi)$ est la forme associée à un opérateur autoadjoint semi borné inférieurement .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1:

La 2ème partie du théorème est la plus simple à démontrer : nous utiliserons la proposition 3.1: en appliquant le lemme 3.1(i) avec $h(t) = |q(t)|^2$, nous obtenons :

$$||VR_\alpha^{\ell}(k^2)||_2^2 \leq C(k) \int_o^{+\infty} \int_o^{+\infty} |q(t)|^2 \left(\frac{2t}{1+2|k|t}\right)^2 e^{-(\mathrm{Im}k)|t-s|}\, dt\, ds$$

où $||A||_2$ désigne la norme Hilbert - Schmidt de l'opérateur A et $C(k)$ une quantité bornée en dehors d'un voisinage de l'origine .

Les conditions (i) et (ii) de la proposition 3.1 sont satisfaites ; l'hypothèse C.2 avec $p=2$ implique que $||VR_\alpha(k^2)||_2^2 \to o$ lorsque $\mathrm{Im}\, k \to \infty$ car l'intégrale précédente peut s'écrire :

$$\int_0^{+\infty} |q(t)|^2 \left(\frac{2t}{1+2|k|t}\right)^2 dt \left[\int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{t-\eta} + \int_{t-\eta}^{t+\eta} + \int_{t+\eta}^{+\infty} e^{-\mathrm{Im}k[t-s]}\, ds \right]$$

Donc $||VR_\alpha^\ell(k^2)|| \leq M < +\infty$ pour certains k, donc $D(H_\alpha^\ell) \subset D(V)$.

D'autre part, soit $\phi \in D(H_\alpha^\ell)$, $\phi = R_\alpha^\ell(k^2)\,\psi$, $k^2 \in \rho(H_\alpha)$: pour $|k|$ assez grand, $\mathrm{Im}\,k$ assez grand et $\varepsilon > 0$

$$||V\phi|| \leq ||VR_\alpha^\ell(k^2)||\;||(H_\alpha - k^2)\phi|| \leq \varepsilon\,||H_\alpha\phi|| + C(\varepsilon)\,||\phi||$$

Comme pour $\mathrm{Im}\,k$ assez grand $(I + VR_\alpha^\ell(k^2))^{-1}$ existe et que $R^\ell(z) = (H^\ell - z)^{-1} = R_\alpha^\ell\,(I + VR_\alpha^\ell(z))^{-1}$ nous avons :

$$R^\ell(z) - R_\alpha^\ell(z) = -R_\alpha^\ell(z)\,VR_\alpha^\ell(z)\,(I + VR_\alpha^\ell(z))^{-1} .$$

Appliquons le lemme 3.1(i) avec $h(t) = |q(t)|$ et $h(t) = |\varepsilon(t)\,q(t)|$ respectivement: la condition C.2 (avec $p=1$) implique que l'opérateur AR_α^ℓ (respectivement BR_α^ℓ) est un opérateur Hilbert Schmidt, donc l'opérateur $R_\alpha^\ell\,V\,R_\alpha^\ell = (BR_\alpha^\ell)^*\,AR_\alpha^\ell$ est nucléaire pour certains k.

Les opérateurs nucléaires forment un idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ donc $R^\ell(z) - R_\alpha^\ell(z)$ est nucléaire pour $\mathrm{Im}\,k$ assez grand ce qui achève la démonstration de la 2ème partie du théorème.

Passons maintenant à la démonstration de la 2ème partie. Tout d'abord, en appliquant le lemme 3.1(ii) avec $h(t) = q(t)$ et $g(s) = |\varepsilon(s)\,q(s)|$, il résulte que :

$$||AR_\alpha^\ell B||_2^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |q(t)|\,|q(s)|\,|G_\alpha(k,s,t)|^2\, ds\, dt$$

$$\leq C(k) \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |q(t)|\,|q(s)| \left(\frac{t}{1+t}\right) \left(\frac{s}{1+s}\right) e^{-(\mathrm{Im}k)|t-s|}\, dt\, ds$$

donc $||AR_\alpha^\ell B||_2^2$ tend vers 0 lorsque $\mathrm{Im}\,k \to \infty$ grâce à la condition C.1 et au théorème de Lebesgue.

Rappelons que A_α^ℓ est semi borné inférieurement (corollaire 1.1)

Soit $\lambda > o$ tel que $A_\alpha^\ell + \lambda > o$ et $-\lambda \in \rho(A_\alpha^\ell)$

Soit $\phi \in D((A_\alpha^\ell + \lambda)^{1/2})$

Alors : $$|(V\phi|\phi)| \leq ||A\phi||^2 = ||A(H_\alpha + \lambda)^{-\frac{1}{2}} (H_\alpha^\ell + \lambda)^{\frac{1}{2}} \phi||^2$$

$$\leq ||A(H_\alpha^\ell + \lambda)^{-\frac{1}{2}}||^2 \, ||(H_\alpha^\ell + \lambda)^{\frac{1}{2}} \phi||^2$$

$$= ||A(H_\alpha^\ell + \lambda)^{-\frac{1}{2}} (A(H_\alpha^\ell + \lambda)^{-\frac{1}{2}})^* \, ||((H_\alpha^\ell + \lambda)\phi|\phi)$$

$$= ||A(H_\alpha^\ell + \lambda)^{-1} A \, ||((H_\alpha + \lambda)\phi|\phi)$$

$$\leq ||AR_\alpha^\ell (k^2) A \, ||((H_\alpha + \lambda)\phi|\phi) \qquad k^2 = -\lambda$$

donc : $$|(V\phi \mid \phi)| \leq \varepsilon((H_\alpha + \lambda_o)\phi|\phi) + C(\varepsilon)\,(\phi|\phi)$$

ce qui prouve que les conditions (i) et (ii) de la proposition 3.1 sont satisfaites.

La condition C.1 implique grâce au lemme 3. que AR_α^ℓ et BR_α^ℓ sont des opérateurs Hilbert - Schmidt .

Il ne reste plus à démontrer que la relation de la résolvante . Pour cela nous ferons appel à B. Simon et plus précisément à la formule qu'il a introduit dans [48] théorème II.34 . Nous ne répèterons pas la démonstration rigoureusement. Formellement, on considère un développement de Born :

$$(\hat{H} - \lambda)^{-1} = (\hat{H}_\alpha + V - \lambda)^{-1} = (\hat{H}_\alpha - \lambda)^{-1} - R_\alpha^\ell \, VR^\ell = R_\alpha^\ell - R_\alpha^\ell \, V[R_\alpha^\ell - R_\alpha^\ell \, V \, R]$$

$$= R_\alpha^\ell - R_\alpha^\ell \, VR_\alpha^\ell + R_\alpha^\ell \, VR_\alpha^\ell VR^\ell = R_\alpha^\ell - R_\alpha^\ell \, VR_\alpha^\ell + R_\alpha^\ell \, VR_\alpha^\ell \, VR_\alpha^\ell + \ldots$$

$$= R_\alpha^\ell - R_\alpha^\ell \, AB \, R_\alpha^\ell + R_\alpha^\ell \, AB \, R_\alpha^\ell \, AB \, R_\alpha^\ell \quad \ldots$$

$$= R_\alpha^\ell - R_\alpha^\ell \, A[I - AR_\alpha^\ell \, B + \ldots \qquad] \, BR_\alpha^\ell$$

Comme nous avons vu que pour $|k|$ assez grand et $\mathrm{Im}\, k$ assez grand

$||AR_\alpha^\ell B|| \to 0$, nous pouvons donner un sens au terme de droite. Il suffira alors de montrer l'égalité sachant que les deux termes ont un sens, en particulier, le membre de droite est égal à :

$$R_\alpha - \left[AR_\alpha \right]^* \quad (I + AR_\alpha^\ell (k^2)\ B)^{-1} \qquad BR_\alpha^\ell$$

Il est alors clair que $R_\alpha^\ell - R^\ell$ est nucléaire puisque AR_α^ℓ et BR_α^ℓ sont Hilbert - Schmidt .

Théorème 3.2:

Soit $A_\alpha^\ell = \dfrac{-d^2}{dr^2} + \dfrac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \dfrac{2\alpha}{r}$ l'opérateur auto-adjoint en 1.1

Soit $A^\ell = A_\alpha^\ell + q$ l'opérateur autoadjoint défini au théorème 3.1 (1° ou 2°)

Alors : 1° : les opérateurs d'ondes :

$$W_\pm(A^\ell, A_\alpha^\ell) = \lim_{t \to \pm \infty} e^{itA^\ell} e^{-itA_\alpha^\ell} E_\alpha^{ac}$$

existent

Ils satisfont la propriété d'entrelacement $AW^\pm = W^\pm A$, ce qui entraîne l'équivalence unitaire entre les restrictions A^ℓ et A_α^ℓ à leurs sous-espaces d'absolue continuité .

2° Ces opérateurs sont complets de sorte que l'opérateur de diffusion , $S = W_-^* W_+$ est unitaire sur $E_\alpha^{ac} L^2(R^+)$.

Preuve :

D'après le théorème 3.1 il est possible d'appliquer la théorie de Birman - Kato - Rosenblum ([55]), d'où le théorème

Remarque : En particulier puisque $R^\ell(z) - R_\alpha^\ell(z)$ est compact , $\sigma_e(A^\ell)$ est égal au spectre essentiel de A_α^ℓ qui est égal à $[0, +\infty[$.

Théorème 3.3

Soit H l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(R^n)$, $n \geq 3$, défini dans le corollaire 3.1, sous la condition C.1 sur le potentiel q.

1° : Les opérateurs d'onde

$$W_\pm(H_\alpha, H) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_\alpha}$$

existent

Ils satisfont la proprieté d'entrelacement $HW_\pm \Rightarrow W_\pm H_\alpha$

2° : Ils sont complets de sorte que l'opérateur de diffusion (matrice S) est un opérateur unitaire de $E_\alpha L^2(R^n)$.

Preuve :

H_α et H sont respectivement des sommes directes hilbertiennes des opérateurs A_α^ℓ et A^ℓ. Par suite :

$$W_\pm(H_\alpha, H) = \oplus W_\pm^\ell (A_\alpha^\ell, A_\ell) \otimes I_\ell$$

$$S = \oplus_\ell W_-^* (A_\alpha^\ell, A_\ell) W_+(A_\alpha^\ell, A_\ell) \otimes I_\ell$$

le résultat annoncé découle du théorème 3.1.

§ 2 Un développement en fonctions propres de l'opérateur H . Expression stationnaire des opérateurs d'ondes et de l'opérateur de diffusion.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace de Banach formé par les fonctions u définies dans $\mathbb{R}_+$, mesurables pour la mesure de Lebesgue et satisfaisant :

$$(2.1) \qquad ||u||_{\mathcal{B}} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}} |u(t)|\,dt < +\infty$$

Identifions l'antidual, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathcal{B}^*$ des formes antilinéaires continues sur $\mathcal{B}$, à l'ensemble des fonctions v telles que :

$$(2.2) \qquad \sup \left|\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\frac{1}{2}} v(t)\right| < +\infty$$

Théorème 3.3

Soit H l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(R^n)$, $n \geq 3$, défini dans le corollaire 3.1, sous la condition C.1 sur le potentiel q.

1° : Les opérateurs d'onde

$$W_{\pm}(H_\alpha, H) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_\alpha}$$

existent

Ils satisfont la propriété d'entrelacement $HW_{\pm} = W_{\pm} H_\alpha$

2° : Ils sont complets de sorte que l'opérateur de diffusion (matrice S) est un opérateur unitaire de $E_\alpha L^2(R^n)$.

Preuve :

H_α et H sont respectivement des sommes directes hilbertiennes des opérateurs A_α^ℓ et A^ℓ. Par suite :

$$W_{\pm}(H_\alpha, H) = \oplus W_{\pm}^\ell (A_\alpha^\ell, A_\ell) \otimes I_\ell$$

$$S = \oplus_\ell W_-^* (A_\alpha^\ell, A_\ell) W_+ (A_\alpha^\ell, A_\ell) \otimes I_\ell$$

le résultat annoncé découle du théorème 3.1.

§ 2 Un développement en fonctions propres de l'opérateur H . Expression stationnaire des opérateurs d'ondes et de l'opérateur de diffusion.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace de Banach formé par les fonctions u définies dans R_+, mesurables pour la mesure de Lebesgue et satisfaisant :

$$(2.1) \qquad \|u\|_{\mathcal{B}} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}} |u(t)|\,dt < \infty$$

Identifions l'antidual, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\mathcal{B}^*$ des formes antilinéaires continues sur $\mathcal{B}$, à l'ensemble des fonctions v telles que :

$$(2.2) \qquad \sup \left| \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\frac{1}{2}} v(t) \right| < +\infty$$

pour la dualité

$$(2.3) \qquad (u|v)_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}^*} = \int_0^{+\infty} u(t)\ \overline{v(t)}\ dt$$

Avec cette convention nous avons ,

$$(2.4) \qquad \overline{(u|v)} = (v,u) \qquad \forall\, v,u \in \mathcal{B}\cap\mathcal{B}^*$$

Comme $\mathcal{D}(]0,+\infty[)$ est contenu à la fois dans $\mathcal{B}$ et, $\mathcal{H}$ on a,

(2.5) $(\mathcal{B}\cap\mathcal{H})$ est dense à la fois dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{H}$.

Soit A un opérateur auto-adjoint, Γ un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, contenu dans le spectre de A . Soit X espace de Banach tel que $X\cap\mathcal{H}$ est à la fois dense dans X et dans $\mathcal{H}$.

Supposons qu'on se donne :

(2.6) $L^2(\Omega,d\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable dans un espace Ω, mesuré par une mesure $d\rho$ σ- finie.

(2.7) $\mathcal{U}: \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\Omega,d\rho)$ partiellement isometrique de $\mathcal{H}$ sur $L^2(\Omega,d\rho)$

(2.8) $\omega : \Omega \longrightarrow \Gamma$ mesurable.

(2.9) $\phi : \Omega \longrightarrow X^*$

(i) $\forall\, u \in \mathcal{B}$ $\xi \longrightarrow \langle u, \phi(\xi)\rangle$ mesurable

(ii) $\forall\ J \subset\subset \Gamma$, $\sup_{\omega(\xi)\in J} ||\phi(\xi)|| < \infty$

On dit que $(\mathcal{U},\phi)$ est un $(X,L^2(\Omega,d\rho))$ développement en fonctions propres de l'opérateur A dans l'ouvert Γ si on a :

(2.10) Le sous espace initial de $\mathcal{U}$ est $E(\Gamma)\mathcal{H}$ et si $E(\Gamma)u \in D(A)$

$$(\mathcal{U}AE(\Gamma)u)(\xi) = \omega(\xi)\,(\mathcal{U}u)(\xi)\ d\rho \quad p.p$$

(2.11) $\forall\, u \in X\cap\mathcal{H}$

$$(\mathcal{U}u)(\xi) = \langle u,\ \phi(\xi)\rangle\, d\rho \quad p.p.$$

Dans les conditions ci-dessus, on peut déduire :

(2.12) $\forall u \in \mathcal{H}$, et $u_n \in X \cap \mathcal{H}$: $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{H}$,

$$(\mathcal{U}u)(\xi) = \lim_{n \to \infty} \langle u_n , \phi(\xi) \rangle \text{ (limite dans } L^2(\Omega, d\rho))$$

(2.13) $\forall u \in \mathcal{H}$, et $\forall J$, $J \subset\subset \Gamma$

$$E(J)u = \int_{\omega(\xi) \in J} (\mathcal{U}u)(\xi)\, \phi(\xi)\, d\rho(\xi)$$

(2.14) $\forall u \in \mathcal{H}$, et la suite (J_n), $J_n \subset\subset \Gamma$, et $J_n \uparrow \Gamma$, on a

$$E(\Gamma)u = \lim_{n \to \infty} \int_{\omega(\xi) \in J_n} (\mathcal{U}u)(\xi)\, \phi(\xi)\, d\rho(\xi) \quad \text{(limite dans } \mathcal{H})$$

On peut illustrer ces définitions par les résultats précédents :

Exemple 1

$$X = L^1_{\sigma}(R_+, L^2(S_{n-1})) \qquad d\sigma = \left(\frac{r}{1+r}\right) dr$$
$$X^* = L^\infty_{\sigma}(R_+, L^2(S_{n-1}))$$

Soit $A = H_\alpha$ l'opérateur défini dans la prémière partie, $\Gamma =]0,+\infty[$

Rappelons que nous définissions $h(\ell,n) = (2\ell + n-2)\,\frac{(\ell + n-3)}{(n-2)!\,\ell!}$ $n > 3$, ℓ

$= 1$ si $\ell = 0$

Soit $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(\ell,m) : \ell \in \mathbb{N}\ , 1 \leq m \leq h(\ell,n)\}$. Nous notons par $d\mu$ la mesure discrète sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\Omega = S \times]0,+\infty[$; $d\rho = d\mu \otimes dk$, dk est la mesure de Lebesgue sur R_+

$\mathcal{U}$ est l'application de $L^2(R^n)$ sur $L^2(\Omega, d\rho)$, défini par =

$$(\mathcal{U}u)_{\ell,m}(k) = \int_0^{+\infty} \phi^{\ell}_{\alpha}(k,r) \int_{S^{n-1}} u(r\xi)\, Y^{\ell}_{m}(\xi)\, dw(\xi)\, r^{\frac{n-1}{2}}\, dr$$

où

$$\phi^{\ell}_{\alpha}(k,r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} + i\alpha/k|}{\Gamma(2\ell+n-1)}\, e^{\pi\alpha/2k} (2kr)^{\ell + \frac{n-1}{2}}$$

$$e^{\mp ikr}\, {}_1F_1(\ell + \tfrac{n-1}{2} \pm i\alpha/k,\ 2\ell+n-1,\ \pm 2i$$

L'application ω est définie :

$$\omega : (\ell,m,k) \longrightarrow k^2$$

ϕ est définie par :

$$\phi : (\ell,m,k) \longrightarrow \phi_\alpha^\ell(kr)\, Y_{\ell,m}(\xi)\, r^{\frac{n-1}{2}}$$

Notre but est de construire un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ qui réalise un développement n fonctions propres sur $(X, L^2(\Omega,d\rho))$ pour l'opérateur perturbé $H = H_\alpha + q$.

.1 Propriétés des opérateurs $W_\alpha^\ell(k^2)$ (resp. $P_\alpha^\ell(k^2)$) dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}^*$)

Nous supposons que la fonction q satisfait à la condition (C.1) et nous posons:

$$(T^\pm(k)f)(s) = q(s) \int_0^{+\infty} G_\alpha^\pm(k,s,t)\, f(t)dt, \quad \mathbb{C}^\pm = \{k \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, k \gtrless 0, \mathrm{Re}\, k > 0\}$$

$$(S^\pm(k)f)(t) = \int_0^{+\infty} G_\alpha^\pm(k,s,t)\, q(s)\, f(s)\, ds$$

Lemme 3.2

(i) les opérateurs $S^\pm(k)$ (respectivement $T^\pm(k)$) sont des opérateurs continus dans $\mathcal{B}^*$ (respectivement dans $\mathcal{B}$) pour tout $k \in \mathbb{C}^\pm$

(ii) $T^\pm(k)$ (respectivement $S^\pm(k)$ sont des opérateurs compacts .

Preuve : $T^+(k) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ si :

$$\|T^+(k)f\|_{\mathcal{B}} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{1+s}\right) |q(s)| \left| \int_0^{+\infty} G_\alpha^+(k,s,t) f(t)dt \right| \leq C(k)\, \|f\|_{\mathcal{B}}$$

Formellement :

$$(T^+(k)\, f|g)_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}^*} = \int_0^{+\infty} g(t) \int_0^{+\infty} G_\alpha^+(k,s,t)\, q(t)\, f(s)\, ds\, dt$$

$$= \overline{\int_0^{+\infty} g(t) \int_0^{+\infty} G_\alpha^-(k,s,t)\, q(t)\, f(s)\, dt}$$

$$= \int_0^{+\infty} f(s) \int_0^{+\infty} G_\alpha^-(k,s,t)\, q(t)\, g(t)\, dt\, ds$$

$$= \overline{(T^-(k)\, g|f)_{\mathcal{B}\times\mathcal{B}^*}}$$

Nous justifierons plus loin cette relation. Il suffit alors de montrer que $T^+(k) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ pour que : $S^-(\bar{k}) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H})$. De même $T^+(k)$ est compact si et seulement si $S^-(\bar{k})$ est compact d'après le théorème de Schauder .

En tenant compte des majorations données (page 8):

$$||T^+(k)f||_{\mathfrak{H}} \leq C(k) \int_0^{+\infty} ds \left(\frac{s}{1+s}\right) |q(s)| \; h(s)$$

où

$$h(s) = \left(\frac{2s}{1+|k|s}\right)^{1-\mu} e^{-(\mathrm{Im}k)s}(1+2|k|s)^{\nu} \int_0^s \left(\frac{2t}{1+2|k|t}\right)^{\mu} |f(t)| e^{(\mathrm{Im}k)t} \frac{dt}{(1+2|k|t)^{\nu}}$$

$$\left(\frac{2s}{1+2|k|s}\right)^{\mu} e^{(\mathrm{Im}k)s} \frac{1}{1+2|k|s} \int_s^{+\infty} \left(\frac{2t}{1+2|k|t}\right)^{1-\mu} |f(t)| e^{-(\mathrm{Im}k)t}(1+2|k|t)^{\nu} d$$

D'une part, la fonction $t \to \left(\frac{2t}{1+2|k|t}\right)^{\mu-1}$ est croissante si $\mu \geq 1$, $t \geq 0$

D'autre part, la fonction $g(s)$: $s \longrightarrow e^{as}(1+2bs)^{-\nu}$ est croissante dans l'intervalle $\left[\frac{1}{b}\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right), +\infty\right[$ où $a = \mathrm{Im}\, k$, $b = |k|$, $\nu = \alpha \mathrm{Im}k/|k|^2$

Notons que si $k_o \in \mathbb{C}^+$, il existe un voisinage V de k_o , $V \subset \mathbb{C}^+$ et un intervalle $[t_v, +\infty[$ dans lequel la fonction g est croissante $\forall\, k \in V$.

Alors :

$$||T^+(k)f|| \leq M \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{1+s}\right) |q(s)| ds\right) \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right) |f(t)| dt\right) \tag{2.16}$$

où M dépend en particulier du maximum de la fonction g sur $[o, t_v]$. Ceci démontre la continuité de T^+ . En remplaçant partout $+$ par $-$, k par $\bar{k}$, nous obtenons de la même manière la continuité de T^- .

justifions maintenant (2.15)

$$\int_0^{+\infty} |q(s)|\ |v(s)| \int_0^{+\infty} |G_\alpha^+(k,s,t)|\ |u(t)|dt\ ds$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |v(s)\ (\tfrac{s}{s+1})\quad (\tfrac{s}{s+1})\ |q(s)| \int_0^{+\infty} |G_\alpha^+(k,s,t)|\ |u(t)|dt\ ds$$

$$\leq C(k)\ ||v||_{\mathcal{E}^*}\ ||u||_{\mathcal{O}}\ \int_0^{+\infty} (\tfrac{t}{1+t})\ q(t)\ dt$$

Cette inégalité justifie l'utilisation du théorème de Fubini et la conclusion (2.15)

Pour démontrer que les opérateurs $T^{\pm}(k)$ (respectivement $S^{\pm}(k)$) sont compacts, introduisons les fonctions :

$$(2.17) \qquad q_n(t) = \begin{cases} q(t) & \text{si } \frac{1}{n} < t < n \qquad |q(t)| \leq n \\ o & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et les opérateurs $T_n^{\pm}(k)$ (respectivement $S_n^{\pm}(k)$) obtenus en remplaçant q par q_n dans 2.14i (respectivement 2.14 ii) Il ressort des calculs précédents que :

$$||T^{\pm}(k) - T_n^{\pm}(k)|| \leq C(k) \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t}\ |q_n(t) - q(t)|\ dt$$

$$||S^{\pm}(k) - S_n^{\pm}(k)|| \leq \quad " \qquad\qquad "$$

et par suite $\lim_{n \to \infty} ||T^{\pm}(k) - T_n^{\pm}(k)||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = \lim ||S^{\pm}(k) - S_n^{\pm}(k)||_{\mathcal{L}(\mathcal{B})} = 0$

Il suffit donc de démontrer que pour tout n, $T_n^{\pm}(k)$ (respectivement $S_n^{\pm}(k)$) est un opérateur compact, puisque $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{B})$ (opérateurs compacts) est fermé dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

D'après le théorème de Schauder , $S^{\pm}$ est le transposé de $T^{\pm}$, il suffit de montrer que $S^{\pm}$ ou $T^{\pm}$ est un opérateur compact.

Autrement dit, il suffit de montrer que l'application linéaire :

$$f \xrightarrow{T} q(.) \int_0^{+\infty} G_\alpha(k,s,.)\, f(s)\, ds$$ (où q est une fonction

mesurable, bornée, nulle en dehors d'un compact $[a,b] \subset]o, +\infty[$) est compacte dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

Soit B un borné de $\mathcal{B}$.

$$\sup_{v \in B} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right) |v(t)|\, dt \leq M < +\infty \tag{2.18}$$

Il faut montrer que $T(B) = \{Tv = u\}_{v \in B}$ est relativement compact dans $\mathcal{B}$. Observons tout d'abord que $\overline{T(B)}$ est contenu dans $L^1(\mathbb{R}_+)$: en effet, tous les éléments $u \in \overline{T(B)}$ s'annulent en dehors de $[a,b]$ et comme $\overline{T(B)}$ est contenu dans , $u \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Comme l'injection de $L^1(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{B}$ est continue, il suffit de montrer que $T(B)$ est relativement compacte dans $L^1(\mathbb{R}_+)$.

Des conditions suffisantes sont alors :

$$\text{(i)} \qquad \sup_{v \in B} \int_0^{+\infty} |(Tv)(t)|\, dt < +\infty$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall \varepsilon > o \quad \exists \eta : \sup_{v \in B} \int_0^{+\infty} |(Tv)(t+h) - (Tv)(t)|\, dt \leq \varepsilon \quad \forall h \leq \eta \tag{2.19}$$

$$\text{(iii)} \qquad \forall \varepsilon > o \quad \exists A : \sup_{v \in B} \int_{|t|>A} |(Tv)(t)|\, dt \leq \varepsilon$$

Par définition : $u = T(k)v = T_1(k)v + T_2(k)v$

avec $u_1(t) = (T_1(k)v)(t) = q(t) \int_o^t G_\alpha(k,s,t)\, v(s)\, ds$

$u_2(t) = (T_2(k)v)(t) = q(t) \int_t^{\infty} G_\alpha(k,s,t)\, v(s)\, ds$

il suffit de prouver (i) (ii) et (iii) pour les fonctions de type u_1 et u_2 .

Comme q est nulle en dehors de $[a,b]$, la condition (iii) est triviale (prendre $A = b$) .
La condition (i) l'est aussi car d'après 2.16 puisque T est un opérateur continu :

$$\sup_{v \in B} \int_0^{+\infty} |(Tv)(t)|dt \leq \left(\frac{a}{1+a}\right)^{-1} \sup_{v \in B} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right) |(Tv)(t)|\, dt$$

$$\leq C \sup_{v \in B} ||Tv|| \leq C\, ||T||\, M .$$

il reste à démontrer (ii) pour les fonctions u_1 et u_2 lorsque $v \in B$.
Par exemple :

$$\int_0^{+\infty} |u_1(s+h)-u_1(s)|ds \leq \int_0^{+\infty} |q(s+h)-q(s)| \int_0^{s+h} |G_\alpha(k,s+h,t)|\, |v(t)|dt \tag{2.20}$$

$$+ \int_0^{+\infty} |q(s)| \int_0^{s} |G_\alpha(k,s+h,t)-G_\alpha(k,s,t)|\, v(t)\, dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} |q(s)| \int_s^{s+h} |G_\alpha(k,s+h,t)|\, v(t)\, dt$$

mais :

$$\int_0^{s+h} |G_\alpha(k,s+h,t)|\,|v(t)|dt \leq \frac{C(k)}{|k|} |W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ik(s+h))| \int_0^{s+h} |\mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikt)\, v(t)|\, dt \tag{2.21}$$

Comme $|q(s+h) - q(s)|$ est nul lorsque $s < a-h$, nous pouvons majorer le terme ci-dessus dans l'intervalle $[a-h, +\infty[$, $o < h < a$. Nous obtenons alors une majoration de 2.21 par :

$$C \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right) |v(t)|\, dt \leq C\, M$$

Le premier terme du second membre de (2.20) est alors majoré par:

$$C \int_0^{+\infty} |q(s+h) - q(s)| \, ds$$

Comme $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$, cette dernière intégrale tend vers o lorsque h tend vers o uniformément par rapport à B.

De même :

$$\int_0^{+\infty} |q(s)| ds \int_{s+h}^{+\infty} |G(k,s+h,t) - G_\alpha(k,s,t)| \, |v(t)| dt$$

$$= C(k) \int_0^{+\infty} ds |q(s)| \Big| \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2iks) \int_{s+h}^{+\infty} v(t) \big(W_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikt)\big)^{-1} \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ik(s+h)) \int_{s+h}^{+\infty} v(t) W_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikt) dt$$

$$= C(k) \int_0^{+\infty} |q(s)| \Big| \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2iks) - \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ik(s+h)) \Big| \int_{s+h}^{+\infty} |W_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ikt)| \, |v(t)| dt$$

$$+ \ldots\ldots$$

dans $[a,b]$ nous pouvons majorer :

$$\Big| \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2iks) - \mathfrak{M}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell+\frac{n-2}{2}}(-2ik(s+h)) \Big| \leq C h$$

et ainsi rendre chaque terme de(2.22) aussi petit que l'on veut, uniformément dans B .La propriété 2 .19(ii) est donc montrée et ceci achève la démonstration du lemme 2.2.

Lemme 2.3

L'application: $k \longmapsto T^{\pm}(k)$ de $\mathbb{C}^{\pm}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ est continue.

Preuve :

$$||T(k) - T(k')|| \leq C(k,k') \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} |q(t)|dt \quad \text{où} \quad C(k,k') \quad \text{est}$$

une quantité bornée si k et k' restent dans un compact de $C^{\pm}$.

Par suite, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe un compact $K \subset]0, +\infty[$ tel que :

$$\sup_{||f|| \leq 1} \int_{K^c} \left(\frac{t}{1+t}\right) |q(t)| \int_0^{+\infty} |G_\alpha(k,s,t) - G_\alpha(k',s,t)|dt\, ds \leq \varepsilon$$

k et k' restant das un compact de $C^{\pm}$.

Examinons alors :

$$\sup_{||f|| \leq 1} \int_K \frac{t}{1+t} |q(t)| \int_0^{+\infty} |G_\alpha(k,s,t) - G_\alpha(k',s,t)|dt\, ds$$

$$\leq \sup_{||f|| \leq 1} \int_K \frac{t}{1+t} |q(t)| \left| \tilde{W}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikt) - \tilde{W}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ik't) \right| \int_0^t \left| \tilde{m}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2iks) \right| |f(s)|ds + \ldots$$

où $\tilde{W} = \Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})\, W$; $\tilde{m} = \frac{1}{2ik} \frac{m}{\Gamma(2\ell + n - 1)}$

En choisissant un voisinage de k , nous pouvons obtenir :

$$\left| \tilde{W}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ikt) - \tilde{W}_{\frac{i\alpha}{k}, \ell + \frac{n-2}{2}}(-2ik't) \right| \leq C|k - k'|$$

le même raisonnement appliqué aux autres termes conduira à la même conclusion .

2 Inversibilité des opérateurs $I - V \frac{\ell}{k}(2)$ dans $\mathcal{L}(B)$ $\mathrm{Im}\, k \geq 0$

Désignons par X l'espace de Banach :

$$(2.23) \qquad X = \left\{ u \in L^0(R_+) : \|u\|_X = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{n}{2}} |u(t)|\, dt < +\infty \right\}$$

Lemme 3.4

(i) la forme bilinéaire :

$$F(k,\varepsilon,u,v) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} u(t)dt \int_0^{+\infty} (G_\alpha^+(\sqrt{k^2+i\varepsilon},s,t) - G_\alpha^-(\sqrt{k^2-i\varepsilon},s,t))v(s)ds$$

est définie et continue dans $M\times M$, pour tout $k\in]0, +\infty[$ et tout $\varepsilon\in R^+$.

$\varepsilon \longrightarrow F(k,\varepsilon,u,v)$ est continue de R^+ dans R^+ .

(ii) $\mathcal{F}_\alpha(M \cap \mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(]0, +\infty[)$ = fonctions continues sur $]0, +\infty[$

(iii) $F(k,0,u,v) = -\overline{(\mathcal{F}_\alpha u)}\,(k)\,(\mathcal{F}_\alpha v)\,(k)$ $\quad u, v \in M\times M$.

Preuve :

$F(k,\varepsilon,u,v)$ est définie $\forall k \in]0, +\infty[$ $\forall \varepsilon \geq 0$ $\forall u,v \in M\times M$ car :

$$\int_0^{+\infty}|u(t)|dt \int_0^{+\infty} G_\alpha^+(\sqrt{k^2+i\varepsilon},s,t)\,|v(s)|ds \leq C(k,\varepsilon)\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\frac{1}{2}}|u(t)|dt\int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{1+s}\right)^{\frac{1}{2}}|v(s)|ds$$

d'où $|F(k,\varepsilon,u,v)| \leq C\,||u||\,||v||$.

on démontre de même la continuité en ε comme dans la démonstration du lemme 3.3

Soit $u \in L^1$ et posons :

$$(\mathcal{F}_\alpha u)(k) = \int_0^{+\infty} \phi_\alpha(k,t)\,u(t)\,dt \,. \qquad (2.24)$$

$\phi_\alpha(k,t)$ est continue par rapport à $(k,t) \in]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et d'autre part $\phi_\alpha(k,t) = O(t)$ à l'origine. Par suite, on peut prolonger la définition 2.24 à M tout entier et $(\mathcal{F}_\alpha M) \subset \mathcal{C}]0, +\infty[$. L'application $u \longrightarrow (\mathcal{F}_\alpha u)(k)$ continue de M dans $\mathbb{C}$.

Soit $(u,v) \in (M \cap \mathcal{H}) \times (M \cap \mathcal{H})$, d'après la continuité par rapport à ε nous obtenons :

$$F(k,o,u,v) = \lim_{\varepsilon \to o^+} \frac{1}{2\pi i} \int_o^{+\infty} v(t) \int_o^{+\infty} (G^+(\sqrt{k^2+i\varepsilon},s,t) - G^-(\sqrt{k^2-i\varepsilon},s,t))\, u(s)\, ds$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o^+} \frac{1}{2\pi i} (v \mid R_\alpha(k^2 + i\varepsilon) - R_\alpha(k^2 - i\varepsilon)\, u)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o^+} \frac{1}{2\pi i} \int_o^{+\infty} \frac{-2i\varepsilon}{(k-\eta)^2+\varepsilon^2} \overline{(\mathcal{F}_\alpha u)}(\eta)\, (\mathcal{F}_\alpha v)(\eta)\, d\eta$$

$$= - \overline{(\mathcal{F}_\alpha u)}(k)\, (\mathcal{F}_\alpha v)(k).$$

d'après le théorème de Lebesgue .

Cette égalité a été démontrée dans $X \cap \mathcal{H}$. Comme $X \cap \mathcal{H}$ est dense dans X et que les deux membres sont des formes bilinéaires continues sur $X \times X$, cette égalité est vraie aussi dans $X \times X$.

Lemme 3.5 (extension d'un résultat de Titchmarsch)

Supposons que q satisfasse la condition C.1, alors l'équation différentielle :

$$-u'' + \left(\frac{\nu(\nu+1)}{t^2} - \frac{2\alpha}{t} + q(t) - k^2\right) u(t) = o$$

$(k > o \quad \nu = \ell + \frac{n-3}{2})$

(i) possède deux solutions $\phi^{\pm}(k,t)$, telles que lorsque $t \to +\infty$, on ait:

$$\phi^+(k,t) = e^{ikt}\, e^{\frac{i\alpha}{k} \log t} + o(1); \quad \phi^-(k,t) = e^{-ikt - \frac{i\alpha}{k} \log t} + o(1)$$

(ii) possède deux solutions $\psi^{\pm}(k,t)$, telles que lorsque $t \to 0$, on ait:

$$\psi^+(k,t) = O(t^{\nu+1}) \quad ; \quad \psi^-(k,t) = O(t^{-\nu})$$

Preuve :

Nous considérons le noyau de Green suivant:

$$H^{\ell}(k,s,t) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2} - \frac{i\alpha}{k})}{(2ik)\Gamma(2\ell+n-1)} \left(\mathcal{M}(-2ikr)W(-2iks)-W(-2ikr)\mathcal{M}(-2iks)\right)$$

où $\mathcal{M}$ et W sont les fonctions de Whittaker d'indice $K = \frac{i\alpha}{k}$, $\mu = \ell + \frac{n-2}{2}$

Nous cherchons les solutions $\phi^{\pm}(k,t)$ de l'équation intégrale

$$\phi^{\pm}(k,t) = W_{\frac{i\alpha}{k},\ell+\frac{n-2}{2}}(\pm 2ikt) - \int_t^{\infty} H^{\ell}(t,s,k)\, q(s)\, \phi^{\pm}(k,s)\, ds$$

Il faut montrer que :

(i) l'équation intégrale admet une solution

(ii) Cette solution satisfait l'équation différentielle, et possède le comportement asymptotique désiré .

Comme $k \in \mathbb{R}^+$, $H^{\ell}(t,s,k)$ est borné uniformément par rapport à s,t sur tout compact pour la variable k . Par suite, la condition C.1 assure l'existence de l'intégrale, et cette intégrale tend vers 0 lorsque $t \to \infty$.

Pour résoudre l'équation intégrale qui est du type de Voltera, nous éliminons d'abord la singularité à l'origine de W_{ℓ} , en considérant l'équation en $v(t) = \phi(t)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell+\frac{n-3}{2}}$.

v satisfait l'équation intégrale :

$$v^{\pm}(k,t) = W_{\pm}(k,t)\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\mu-1} + \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\mu-1}\int_t^{\infty} H^{\ell}(k,s,t)q(s)\left(\frac{s}{1+s}\right)^{-\mu+1} v^{\pm}(s)\, ds .$$

Sur l'espace $\mathcal{E}_b([0, +\infty[)$ des fonctions continues bornées, l'opérateur :

$$v \longrightarrow (M(k)v)(t) = \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\mu-1}\int_t^{+\infty} H^{\ell}(k,s,t)\, q(s)\left(\frac{s}{1+s}\right)^{\mu-1} v(s)\, ds$$

est un opérateur borné. D'autre part, comme $s \geqslant t$ nous avons :

$$\left|\left(\frac{t}{1+t}\right)^{\mu-1} H^{\ell}(k,s,t)\, \frac{s}{1+s}\, q(s)\right| < C(k)\, \frac{s}{1+s}\, |q(s)|$$

Par suite : $\| M(k)^n \| \leqslant C^n \frac{N^n}{n!}$

Donc : $(I - M(k))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} M(k)^n$ existe ;

et $\phi^{\pm}(k,.) = (I - M(k)^{-1}\ W_{\pm}(k,.)$ est la solution cherchée.

Pour obtenir les solutions $\psi^{\pm}(k,t)$ on considère l'équation :

$$\psi^{\pm}(k,t) = \psi_o^{\pm}(k,t) - \int_o^t H^{\ell}(k,s,t)\, q(s)\, \psi^{\pm}(k,s)\, ds\ ,$$

où $\psi_o^{+}(k,t)$ (resp. $\psi_o^{-}(k,t)$) est la fonction de Whitakker $\mathcal{M}_{K,\mu}$ (resp. $W_{K,\mu}$)

Théorème 3.4

(1) Si q satisfait C.1, alors $\forall\, k \in\,]0, +\infty[$ $(I + T(k))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$

(2) si q satisfait C.2, alors $(I + T(k))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ $\forall\, k \in C^{\pm}$

et l'application $k \to (I + T(k))^{-1}$ est continue .

Preuve : Comme T(k) est compact, la théorie de Riesz-Schauder implique si $I \pm T(k)$ n'est pas inversible, l'existence de $\phi \in \mathcal{B}$: $\phi = \mp T(k)\, \phi = VR_{\alpha}(k^2)\phi$. Posons $f(t) = (R(k^2)\phi)\ (t)$, f est alors solution de l'équation différentielle examinée dans le lemme 3.5.

Remarquons d'abord que $\lim_{t \to 0} f(t) = 0$, alors, d'après le lemme 3.5

$$f(t) = O(t^{\mu + 1/2}) \text{ au voisinage de 0, } \mu = \ell + \frac{n-2}{2}$$

Par suite :

$$\int_o^1 t^{1/2} |\phi(t)|\, dt = \int_o^1 t|q(t)|\ \ |t^{-1/2} f(t)|\, dt \leqslant \int_o^1 t|q(t)|\, dt < +\infty$$

donc $\phi \in M$ et d'après le lemme 3.4, nous avons :

$$\lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{i} (\phi | R(k^2 + i\varepsilon) - R(k^2 - i\varepsilon)\ \phi) = 2\pi\, |\hat{\phi}(k)|^2 \ ;$$

ou encore, d'après la continuité par rapport à k de la forme bilinéaire :

$$\mathrm{Im}(\phi | R(k^2)\ \phi) = 2\pi |\hat{\phi}(k)|^2$$

Mais ϕ satisfait l'équation $\phi = q\ R(k^2)\ \phi$:

$$(\phi | R(k^2)\ \phi) = (q\ .\ R(k^2)\ \phi \mid R(k^2)\ \phi)$$

Comme q est réel, la quantité ci-dessus est réelle et :

$$|\hat{\phi}(k)|^2 = 0\ .$$

Revenons à la fonction $f(t) = R(k^2)\ \phi$, nous avons :

$$f(t) = W(kt) \int_0^t \mathcal{M}(ks)\ \phi(s)ds + \mathcal{M}(kt) \int_t^{+\infty} W(ks)\ \phi(s)ds.$$

Comme ϕ est intégrable à l'infini, le $2^{ème}$ terme du $2^{ème}$ membre tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. D'autre part, comme W(t) est borné (k est réel > 0) et que la limite du 1^{er} terme du second membre est proportionnel à $\hat{\phi}(k)$, on déduit que :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = 0.$$

D'après le lemme 3.5, f est alors indentiquement nulle et $\phi \equiv 0$.

Supposons maintenant que q satisfait C.2: en particulier $\frac{t}{1+t}\ q(t)$ est dans L^2. Nous avons vu que :

$$\sup_{t \geq 0} \left| \left(\frac{1+t}{t} \right) R(k^2)\ \phi \right| < \infty$$

D'où $\phi\ (t) = \frac{t}{1+t}\ q(t) \left[\frac{1+t}{t} R(k^2)\ \phi \right] \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Comme $\mathrm{Im}(k^2) \neq 0$, $k^2 \in \rho(A_\alpha^\ell)$, $f = R_\alpha(k^2)\ \phi \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Nous avons vu que : $(A^\ell - k^2)\ f = 0$ avec $k^2 \in \rho(A^\ell)$, mais cela n'est pas possible avec f dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ sauf si $f \equiv 0$.

Donc $I \pm T(k)$ est inversible pour tout $k \in \mathbb{C}^+$.

La continuité de $k \to T(k)$ de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ et de $\mathcal{U} \to \mathcal{U}^+$ de I sur $\mathcal{B}$ dans lui même, implique le continuité de $k \to (I + T(k))^{-1}$ de $\mathbb{C}^+$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$

2.3 Absolue continuité de l'opérateur H :

Posons ;

$$q_n(r) = \begin{cases} q(r) & 0 < r < n \qquad |q(r)| < n \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Nous désignons par A^{ℓ} (resp. A_n^{ℓ}) l'opérateur auto-adjoint associé à l'expression $A_\alpha^{\ell} + q$ (resp. $A_\alpha^{\ell} + q_n$) dans le théorème 3.1.

Nous désignons par E (resp. E_n) la mesure spectrale attachée à A^{ℓ} (resp. A_n^{ℓ}).

Proposition 3.4 quand $n \to \infty$

(1) $E_n^{\ell}([0, +\infty[) \longrightarrow E^{\ell}([0, +\infty[)$

(2) $W_{\pm n}^{\ell}(A_\alpha^{\ell}, A_n^{\ell}) \longrightarrow W_{\pm}(A_\alpha^{\ell}, A^{\ell})$

(3) $S_n \longrightarrow S$

Preuve :

La définition de q_n et la condition C.1 impliquent :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |q_n(t) - q(t)| \, |q_n(s) - q(s)| \left(\frac{t}{1+t}\right) \left(\frac{s}{1+s}\right) dt\, ds = 0$$

Posons :

$$B_n(\lambda) = (A_\alpha^{\ell} - \lambda)^{-\frac{1}{2}} \quad V_n (A_\alpha^{\ell} - \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

$$B(\lambda) = (A_\alpha^{\ell} - \lambda)^{-\frac{1}{2}} \quad V (A_\alpha^{\ell} - \lambda)^{-\frac{1}{2}}$$

alors $\lim_{n \to \infty} ||B_n(\lambda) - B(\lambda)||_2^2 = ||(A_\alpha^{\ell} - \lambda)^{-\frac{1}{2}} (V - V_n) (A_\alpha^{\ell} - \lambda)^{-\frac{1}{2}}||_2^2 = 0$

Par suite, en utilisant la formule de Tiktopoulos([48]), nous avons :

$$R^{\ell}(z) = (A^{\ell} - z)^{-1} = (A_\alpha^{\ell} - z)^{-1} (I + (A_\alpha^{\ell} - z)^{-\frac{1}{2}} V (A_\alpha^{\ell} - z)^{-\frac{1}{2}} (A_\alpha^{\ell} - z)^{-\frac{1}{2}}$$

Donc $R_n(z) \longrightarrow R(z)$.

Le théorème 1.15 de [28.1] achève la démonstration de (1).

Pour démontrer (2) et (3) on utilise la même argumentation que dans [48].

Théorème 3.5

L'opérateur autoadjoint $A^{\ell} = A_{\alpha}^{\ell} + q$, (défini dans le théorème 3.1 sous la condition C.1) est absolument continu dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

Preuve : Soit Δ l'intervalle $[a,b]$ avec $a > 0$, $b > 0$. Il est clair que le lemme 3.5 implique la non existence de fonction de carré intégrable, solution de l'équation différentielle $(A^{\ell} - k^2)\, u = 0$ pour $k > 0$; autrement dit, il n'y a pas de valeurs propres positives.

Soit $\phi \in \mathcal{B} \cap L^2(\mathbb{R}^+)$;

$$(E_n(\Delta)\,\phi|\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \frac{1}{2i\pi} \left(R_n(\lambda + i\varepsilon) - R_n(\lambda - i\varepsilon)\,\phi|\phi \right) d\lambda.$$

Comme $I + T(k)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, $I + S(k)$ est inversible dans $\mathcal{L}(\mathcal{B}^*)$.

Posons $f_n^{\pm} = R_n(\lambda \pm i\varepsilon)\,\phi$; on peut montrer que $f_n \in \mathcal{B}^*$.

Soit $u_n^{\pm}$ l'unique solution dans $\mathcal{B}^*$, de l'équation de Lipmann-Schwinger.

$$u_n^{\pm}(t) = f_n^{\pm}(t) + \int_0^{+\infty} G_{\alpha}^{\ell}(\sqrt{k^2 \pm i\varepsilon},\, s,t)\, q_n(s)\, u_n(s)\, ds.$$

$u_n^{\pm}$ est solution de l'équation différentiable.

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{t^2} - \frac{2\alpha}{t} + q(t) - k^2 \right) u_n(t) = \phi(t)$$

Comme $\phi \in L^2(\mathbb{R}^+)$; $f_n^{\pm} = R_n(\lambda \pm i\varepsilon)\,\phi$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^+) \cap D(A_n^{\ell})$. D'autre part, $q_n u_n^{\pm} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $u_n^{\pm} \in D(A_n^{\ell})$ puisque $D(A_n^{\ell}) = D(A_{\alpha}^{\ell})$.

D'où $R_n(\lambda \pm i\varepsilon)\,\phi = u_n(\sqrt{k^2 \pm i\varepsilon}\,, \phi)$ où le second membre désigne la solution de l'équation intégrale ci-dessus.

Donc, si $\Delta = [a,b] \subset]0, +\infty[$

$$(E_n(\Delta)\ \phi|\phi\ ) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b (u_n(\sqrt{k^2 + i\varepsilon},\ \phi\ ) - u_n(\sqrt{k^2 - i\varepsilon},\ \phi)|\ \phi)\ d\,k^2$$

or la solution $u_n^{\pm}$ est continue de la varable k, puisqu'il en est ainsi de l'opérateur $S^{\pm}(k)$ dans $\mathbb{C}^{\pm}$.

On a donc :

$$(E_n(\Delta)\ \phi|\phi\ ) = \int_a^b (u_n(\sqrt{k^2 \pm io},\ \phi) - u_n(\sqrt{k^2 - io},\ \phi)|\ \phi)\ d(k^2)$$

Nous savons que le premier membre converge vers $(E(\Delta)\ \phi|\phi)$; le second vers l'intégrale

$$\int_a^b (u\ (\sqrt{k^2 + io},\ \phi) - u(\sqrt{k^2 - io},\ \phi)|\phi)\ d(k^2)$$

où $u\ (\sqrt{k^2 \pm io},\ \Phi\ ) = u^{\pm}$ est la solution de l'équation :

$$\overset{\pm}{u}(t) = \overset{\pm}{f}(t) + \int_o^{+\infty} G_\alpha^\ell(\sqrt{k^2 \pm io},\ s,\ t)\ q(s)\ \overset{\pm}{u}(s)\ ds. \qquad (\ f\ = R_\alpha^\ell(k^2 \pm io)\ \Phi\ )$$

Ce dernier point est dû à la convergence des opérateurs $S_n^{\pm}(k)$ et $S^{\pm}(k)$ uniformément lorsque k reste dans un compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 3.6

Soit q une fonction définie sur $]o, +\infty[$, mesurable, satisfaisant

$$(C.1) \qquad \int_o^{+\infty} \frac{t}{1+t} |q(t)| dt < +\infty$$

Alors :

I) Il existe deux familles $(\phi_\pm^\ell(k,t))$ de fonctions définies dans $R^+ \times R^+$:

a) $\forall k \in R^+$, $\phi_\pm^\ell(k,t)$ est une fonction continue bornée; $\forall$ le compact $K \subset R^+$, $\sup_{k \in K} \|\phi(k,.)\|_\infty < \infty$

b) $\phi_\pm^\ell(k,t) = C(t^{\mu+\frac{1}{2}})$ au voisinage de $t=0$

c) $\phi_\pm^\ell$ satisfait l'équation de Lippmann - Schwinger :

$$(1) \qquad \phi_\pm^\ell(k,t) = \phi_\alpha^\ell(k,t) - \int_o^{+\infty} G_\alpha^\ell(k,s,t)\, q(s)\, \phi^\ell(s,k)\, ds$$

d) $\phi_\pm^\ell$ satisfait l'équation différentielle (au sens des distributions)

$$(2) \qquad -\phi_\pm''(k,t) + \left[\frac{\mu^2 - \frac{1}{4}}{t^2} - \frac{2\alpha}{t} + q(t)\right] \phi_\pm^\ell(k,t) = k^2\, \phi_\pm^\ell(k,t) \qquad \mu = \ell + \frac{n-2}{2}$$

II) Les transformations de Fourier généralisées

$$(3) \qquad (\mathcal{F}_\pm^\ell f)(k) = \lim_{n \to \infty} \int_{o<t<n} \overline{\phi_\pm^\ell(k,t)}\, f(t)\, dt$$

définissent un isomorphisme isométrique de :

$$E(]o, +\infty[) \quad L^2(R_+) \quad \text{sur} \quad L^2(R_+) .$$

l'isomorphisme réciproque est : $\mathcal{F}_\pm^{\ell *} = \overline{\mathcal{F}_\pm^\ell}$

$$(4) \qquad (\overline{\mathcal{F}_\pm^\ell} g)(t) = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}<k<n} \phi_\pm^\ell(k,t)\, g(k)\, dk$$

III) Soit A^ℓ l'opérateur autoadjoint défini par le théorème 3.1(1°)- formellement : $A^\ell = A_\alpha^\ell + q$.

a) A^ℓ est absolument continu dans $]0 \quad +\infty[$

b) nous avons : $(\mathcal{F}_{\pm}^{\ell} E(o,+\infty) f)(k) = k^2 (\mathcal{F}_{\pm}^{\ell} f)(k)$ $\forall f \in E(o,+\infty)$ $f \in D(A^{\ell})$

IV) Soit $W_{\pm}^{\ell}$ l'opérateur d'ondes associé au couple $(A_{\alpha}^{\ell}, A_{o}^{\ell})$ et soit $S^{\ell} = W_{-}^{\ell *} W_{+}^{\ell}$ l'opérateur de diffusion (Th 3.2)

$$(5) \qquad (W_{\pm}^{\ell} f)(t) = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}<k<n} (\mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} f)(k)\, \phi_{\pm}^{\ell}(k,t)\, dk$$

$$(6) \qquad (Sf|g) = (\mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} f | \mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} g) + \int_{o}^{+\infty} \hat{S}(k)\, (\mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} f)(k)\, (\mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} g)k\, dk$$

$\forall f \in E_{\alpha}(o+\infty)$ $L^2(\mathbb{R}_+)$

$$(7) \qquad \text{avec } \hat{S}(k) = 2\pi i \int_{o}^{+\infty} q(t)\, \phi_{+}^{\ell}(t,k)\, \phi_{\alpha}^{\ell}(t,k)\, dt \ .$$

Corollaire 3.2 :

Soit H l'opérateur auto adjoint défini dans le corollaire 3.1 sous la condition C.1 sur q . H est formellement égal à $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + q(|x|)$

Définissons : $\tilde{\mathcal{U}}_{\pm}$ et $\tilde{\phi}_{\pm}$ respectivement par :

$\tilde{\mathcal{U}}_{\pm} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(S \times \mathbb{R}^+, d\mu \otimes dk)$

$$u \longrightarrow (\tilde{\mathcal{U}}_{\pm})(\ell,m,k) = \int_{o}^{+\infty} r^{\frac{n-1}{2}} \phi_{\pm}^{\ell}(k,r) \left(\int_{S^{n-1}} u(r\xi)\, dio(\xi) \right) dr$$

$\tilde{\phi}_{\pm} : S \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow X^{\mathbb{C}}$

$$(\ell,m,k) \longrightarrow \tilde{\phi}_{\pm}(\ell,m,k) = \phi_{\pm}^{\ell}(k,r)\, r^{\frac{n-1}{2}} Y_{\ell,m}(\xi)$$

Alors $(\tilde{\mathcal{U}}_{\pm}\ \tilde{\phi}_{\pm})$ réalise un développement en fonctions propres de l'opérateur H sur $(X, L^2(X \times \mathbb{R}^+, d\mu \otimes dk)$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

En particulier, il en résulte que H est absolument continu sur $[0,+\infty[$.

Preuve :

$\phi_{\pm}(k,t)$ existe d'après le théorème 3.1. Par définition, $\phi_{\pm} \in \mathcal{B}^{*}, \forall k \in \mathbb{R}_{+}$ et satisfait l'équation de Lippmann-Schwinger (1). De sorte que nous pouvons déduire de cette équation :

(i) $\phi_{\pm}(k,t)$ est une fonction continue de k et t dans $\mathbb{R}_{+}^{*} \times \mathbb{R}_{+}^{*}$,

(ii) $\phi_{\pm}$ satisfait l'équation différentielle (2) au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{+}^{*})$:

Posons

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\pm}^{\ell} = \mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} W_{\pm}^{*}$$

D'après le théorème 3.2, $W_{\pm}$ est un opérateur isométrique de $E_{\alpha}(\mathbb{R}^{+}) L^{2}(\mathbb{R}^{+})$ sur $E_{ac}(\mathbb{R}) L^{2}(\mathbb{R}^{+})$. Comme d'après le théorème 3.4, et la remarque suivant le théorème 3.2 :

$$E_{ac}(\mathbb{R}) L^{2}(\mathbb{R}^{+}) = E(\mathbb{R}^{+}) L^{2}(\mathbb{R}^{+})$$

$W_{\pm}$ est un opérateur isométrique de $E(\mathbb{R}^{+}) L^{2}(\mathbb{R}^{+})$ sur $E_{\alpha}(\mathbb{R}^{+}) L^{2}(\mathbb{R}^{+})$

Comme $\mathcal{F}_{\alpha}^{\ell}{}_{\pm}$ est un opérateur isométrique de $E_{\alpha}(\mathbb{R}^{+})$ sur $L^{2}(\mathbb{R}^{+})$, $\tilde{\mathcal{F}}_{\pm}^{\ell}$ est bien un opérateur isométrique de $E(\mathbb{R}^{+}) L^{2}(\mathbb{R}^{+})$ sur $L^{2}(\mathbb{R}^{+})$.

D'autre part, si :

$$f \in E(\mathbb{R}^{+}) L^{2}(\mathbb{R}^{+}) \cap D(A^{\ell}) \text{ on a :}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\pm}^{\ell}(A^{\ell} f) = \mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} W_{\pm}^{*} A^{\ell} f = \mathcal{F}_{\alpha}^{\ell}(A_{\alpha}^{\ell} W_{\pm}^{*} f) = k^{2} \mathcal{F}_{\alpha}^{\ell} W_{\pm}^{*} f = k^{2}(\tilde{\mathcal{F}}_{\pm}^{\ell} f)$$

Nous allons montrer que $\tilde{\mathcal{F}}_{\pm}^{\ell} = \mathcal{F}_{\pm}^{\ell}$ et pour cela, nous allons exprimer $W_{\pm}$. Tout d'abord, d'après la proposition 3.4, si u et v $\in \mathcal{B} \cap \mathcal{H}_{\alpha}$

$$(W_{\pm}\, u|v) = \lim_{n \to \infty} (W_{\pm,n}\, u|v)$$

où $W_{\pm,n} = \lim_{t \to \pm\infty} e^{it A_n^{\ell}}\, e^{-it A_\alpha^{\ell}}$

l'existence de $W_{\pm,n}$ implique que :

$$(W_{+,n}\, u|v) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-2\varepsilon t} \left(e^{-itA_\alpha^{\ell}} u \mid e^{-itA_n^{\ell}} v \right) dt.$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (R_\alpha(\lambda + i\varepsilon)\, u | R_n(\lambda + i\varepsilon)\, v)\, d\lambda.$$

Comme $D(A_\alpha^{\ell}) = D(A_n^{\ell})$, n peut montrer que :

$$(W_{+,n}\, u|v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} ((R_\alpha(\lambda + i\varepsilon) - R_\alpha(\lambda - i\varepsilon))\, u | (I - VR_n(\lambda + i\varepsilon))v) d\lambda.$$

Nous avons examiné, dans le lemme 3.4, le comportement de la forme bilinéaire (k,ε,u,v). D'autre part, $VR_n(\lambda + i\varepsilon)$ a une limite lorsque $\varepsilon \to 0$ en temps qu'opérateur dans $\mathcal{B}$.

Supposons que $u,v \in \mathcal{B}$. Alors en tenant compte du lemme 3.4 (iii)

$$(W_{+,n}\, u|v) = \int_0^{+\infty} (\mathcal{F}_\alpha^{\ell} u)(k)\, \overline{(\mathcal{F}_\alpha^{\ell} w)(k)}\, dk$$

où

$$w = (I - V_n R_n(k^2 + i\varepsilon))\, v = (I + V_n R_\alpha^{\ell})^{-1} v$$

or :

$\phi_\alpha^{\ell}(k,.) \in \mathcal{B}^*$, donc :

$$(\mathcal{F}_\alpha^{\ell} w) = (\phi_\alpha^{\ell}(k,.)|w) = ((I + R_\alpha^{\ell}(k^2) V_n)^{-1}\, \phi_\alpha^{\ell}(k,.)|v)$$

$$= (\phi_+^{\ell}(\,,.)|v)$$

d'où

$$(W_{+,n}\, u|v) = \int_0^{+\infty} (\mathcal{F}^{\ell}_{\alpha} u)(k) \left(\int_0^{+\infty} \phi^{\ell}_{+}(k,r)\, \overline{v(r)}\, dr \right) dk$$

Si u,v sont bien choisis, on peut permuter les intégrales de sorte que l'on a dans un ensemble dense :

$$W_{+,n} = \overline{\mathcal{F}}^{\ell}_{+,n}\, \mathcal{F}^{\ell}_{\alpha} .$$

La convergence de $T_m(k)$ vers $T(k)$ et l'existence de $(I + T_m(k))^{-1}$; $(I + T(k))^{-1}$, $\forall k \in \mathbb{R}^*_+$ impliquent que :

$$\lim_{m \to \infty} || I + T(k)^{-1} - (I + T^{\pm}_m(k))^{-1} || = 0$$

uniformément lorsque k reste dans un compact de R^*_+

Il en résulte que :

$\lim_{m \to \infty} | \phi^{\pm}_m(k,t) - \phi^{\pm}(k,t) | = 0$ uniformément pour $t \in R^*_+$ et k dans un compact de R^*_+.

Donc

$\mathcal{F}^{\ell}_{+,n} \longrightarrow \mathcal{F}^{\ell}_{+}$ et $W_+ = \overline{\mathcal{F}}^{\ell}_{+}\, \mathcal{F}^{\ell}_{\alpha}$ dans un ensemble dense et comme ce sont deux opérateurs isométriques, ils coïncident partout.

Pour démontrer la relation de la matrice S, on agit de même : on exprime d'abord S_n puis S par passage à la limite.

CHAPITRE 4

Théorie de la diffusion pour l'opérateur $H_{\alpha,p} = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)$ dans le problème extèrieur.

§1. Définition d'une extension auto-adjointe $H_{\alpha,p}$ associée à l'expression formelle $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p$, à l'extérieur d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Existence des opérateurs d'ondes $W \pm (H_\alpha, H_\alpha + p)$.

1.1 Notations et hypothèses.

Soit Ω l'extérieur d'une hypersurface compacte Γ, contenue dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; de dimensions n-1, régulière au sens de LIONS [34,chap.I.7.10]. On désigne par $H^2(\Omega)$, l'espace de Sobolev, défini par

$$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \quad D^\beta u \in L^2(\Omega) \quad , \forall \beta \ |\beta| \leq 2\}$$

où

$$D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{(\partial x_1)^{\beta_1} \ldots (\partial x_n)^{\beta_n}} \quad \text{agit au sens des distributions}$$

L'hypothèse sur Γ permet, en particulier, de considérer les éléments de $H^2(\Omega)$ comme des restrictions de fonctions appartenant à $H^2(\mathbb{R}^n)$, et d'autre part de définir des traces u et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur Γ, de sorte que'on a la formule de Green.

$$(1.1) \qquad \int_\Gamma g \frac{\partial f}{\partial \nu} \, ds = - \int_\Omega (g \, \Delta f + (\overrightarrow{\nabla f} \overrightarrow{\nabla g})) \, dx \ , \ \forall f,g \in H^2(\Omega)$$

Pour montrer que notre théorie est applicable aussi bien à l'opérateur de Dirch et sur Γ ou à l'opérateur de Robin, nous supposons que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où, pour Γ_i est soit $\emptyset$, soit égal a la réunion de certaines composantes connexes de Γ. Nous nous donnons aussi une fonction σ, définie sur Γ_1, à valeurs réelles, lipchitzienne, et une fonction p définie dans Ω, à valeurs réelles, mesurable, satisfaisant

$$(1.2) \qquad (i) \ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\substack{|x-y| \leq 1 \\ x \in \Omega}} \frac{|p(x)|^2}{|x-y|^{n-\mu}} \, dx < +\infty$$

pour un certain μ, $3 \leq \mu < 4$

$$\lim_{|y| \to +\infty} \int_{|x-y| \leq 1, x \in \Omega} |p(x)|^2 dx = 0$$

4.2 Définition d'une extension auto-adjointe $H_{\alpha,p}$ dans $L^2(\Omega)$. Spectre essentiel de $H_{\alpha,p}$

Proposition 4.1

Sous les conditions imposées à σ et à p, l'opérateur $H_{\alpha,p}$ défini dans $L^2(\Omega)$ par :

$$D(H_{\alpha,p}) = \{u \in H^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1;\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$$

4.3) $$(H_{\alpha,p}u)(x) = (-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x))\, u(x)$$

est un opérateur auto-adjoint, dont le spectre essentiel est égal à $[0,+\infty[$

Preuve:

L'opérateur H_o, défini par :

4.4) $$D(H_o) = \{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1;\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$$

$$H_o u = -\Delta u$$

est un opérateur auto-adjoint et $\sigma_e(H_o) = [0,+\infty[$. Le premier point peut être établi en introduisant la forme sesquilinéaire suivante:

4.5) $$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_2}\ \overline{\frac{\partial v}{\partial x_2}})\, dx + \lambda \int_\Omega u\bar{v}\, dx + \int_{\Gamma_1} \sigma(x) u(x)\, \overline{v(x)}\, ds$$

sur le sous espace V de $H^1(\Omega)$, $V = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$ et λ est un nombre assez grand . a est V - coercive. Avec des théorèmes de régularité, on montre que $H_o - \lambda I$ est une bijection de $D(H_o)$ sur $L^2(\Omega)$.

Pour le spectre essentiel, l'éllipticité de $-\Delta$ implique que le spectre essentiel de H_o est égal au spectre essentiel de l'opérateur $-\Delta$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que pour un opérateur auto-adjoint H, le spectre essentiel est caractérisé par :

4.6) $\lambda \in \sigma_e(A) \Longleftrightarrow$ il existe une suite $u_n \in D(A)$, (i) $||u_n|| = 1$; (ii) $u_n \to 0$, (iii) $(A - \lambda)u \to 0$

Soit $\lambda \in [0,+\infty[$: il existe $u_n \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $||u_n||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, $u_n \to 0$, et $(\Delta + \lambda)u_n \to 0$.

Soit $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, une fonction indéfiniment dérivable, satisfaisant $0 \leq \phi \leq 1$, supp $\phi \subset \Omega$; ϕ égale à 1 en dehors d'un compact K.

Alors $\phi_n = \phi u_n$ appartient à $D(H_o)$, et satisfait 1.6 (ii). D'autre part :

$$(\Delta + \lambda)\,\phi u_n = (\Delta\phi)u_n + \phi(\Delta + \lambda)u_n + 2\nabla\phi\,\nabla u_n$$

Par hypothèse $(\Delta + \lambda)u_n \to 0$. Il faut examiner les deux termes extrêmes. Comme $||\Delta u_n|| \leq M$, par une inégalité à priori, l'ensemble $\{(\Delta\phi)u_n, \nabla\phi\nabla u_n\}$ est un ensemble borné de $H^1(\Omega)$, donc il est relativement compact dans $L^2(\Omega)$ (toutes les fonctions sont à support compact)

Par suite, $(\Delta\phi)u_n \to 0$, et $\nabla\phi\nabla u_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)$

Le même raisonnement implique qu'on peut extraire une suite de ϕ_n telle que $||\phi_{n_k}|| = 1$.

En effet, s'il existait un compact D tel que supp $u_n \subset D$ $\forall n$, alors $u_n \to 0$ contrairement à l'hypothèse : $||u_n|| = 1$ $\forall n$.

On démontrerait plus facilement: $\lambda \in \sigma_e(H_o) \Longrightarrow \lambda \in [0,+\infty[$.

Passons maintenant à l'opérateur $H_{\alpha,p} = H_o + V$. Il nous suffit de démontrer que la perturbation réelle V est H_o-compacte, alors $H_{\alpha,p}$ sera auto-adjoint et $\sigma_e(H_o) = [0,+\infty[= \sigma_e(H_{\alpha,p})$ ([45]).

Il suffit de prouver que l'application de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

$$(1.7)\quad (Vu)(x) = (-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x))u(x)$$

est compacte. En prolongeant par 0 la fonction p, il revient au même de démontrer la propriété (1.7) dans $\mathbb{R}^n$. Or celle-ci résulte de l'hypothèse (1.2)(i) et (ii) grâce au théorème 4.1 [(45) page 111].

Remarques : Il est possible d'affaiblir l' hypothèse (1.2)(i) et (ii)

L'opérateur H sera défini par la forme quadratique.

$$(Hu,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega (p(x) - \frac{2\alpha}{|x|})|u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \sigma(x)|u|^2 d\sigma$$

dès lors qu'on mettra des hypothèses analogues à celles données par E. BALSLEV dans [58] .

1.3 Existence des opérateurs d'ondes $W_{\pm}(H_\alpha, H_\alpha, p)$.

Soit μ une fonction définie dans $\mathbb{R}^n$, indéfiniment dérivable; égale à 1 au voisinage de l'infini et dont le support est contenu dans Ω. On notera encore par μ, l'opérateur de multiplication par μ, qui envoie $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 4.2

Les opérateurs d'ondes généralisées

$$1.8)\quad W_{\pm}^{D}(H_o, H_{\alpha,p}) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_{\alpha,p}}\, \mu e^{-itH_o}\, e^{iH_o'(t)}$$

existent, ne dépendent pas de μ, à condition que p satisfait

$$(1.9)\quad (1+|x|)^{-(n/2-1)+\varepsilon}\, p(x) \in L^2(\Omega), \text{ pour un certain } \varepsilon > 0.$$

Preuve: Rappelons que H_o est un opérateur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les opérateurs $e^{iH_o'(t)}$ ont déjà été introduits au chap. 1.

Soient μ_1 et μ_2 deux fonctions satisfaisant les propriétés de μ. L'indépendance de $W_{\pm}$ à l'égard de μ revient à démontrer que

$$(1.10\quad \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_{\alpha,p}}\, (\mu_1-\mu_2)\, e^{-itH_o}\, e^{iH_o'(t)} = 0$$

Soit $f \in \mathcal{S}$, c'est à dire f est indéfiniment dérivable à décroissance rapide et la transforme de Fourier $\hat{f}$ def s'annule dans un voisinage de l'origine.

Nous avons vu dans le lemme 1.4 que:

$$(1.11)\quad (e^{-itH_o}\, e^{iH_o'(t)} f)(x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} (\phi_1(x,t) + \phi_2(x,t)$$

$$\sup_{\substack{x \in R^n \\ t \geq 1}} |(x/t)^p\, \phi_i(x\ t)| \leq C(p) \quad \forall p. \ \forall i = 1, 2$$

Comme $\mu_1 - \mu_2$ est une fonction support compact, il est evident que (1.10) est vrai pour $f \in \mathcal{S}$ Comme les opérateurs sont equicontinus, on a aussi (1.10) pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$: en fait si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}$, avec $||f-g|| \leq \varepsilon$

$||(e^{-itH_o}\ e^{iH_o'(t)})(f-g)|| \leqslant \varepsilon$, et $||e^{itH}(\mu_1 - \mu_2)e^{-itH_o}\ e^{+itH_o'(t)}(f-g)|| \leq M\varepsilon$

où $M = \sup_x |(\mu_1 - \mu_2)(x)|$.

Pour l'existence on va imiter le raisonnement déjà fait dans le théorème 1.9 c'est à dire qu'on va montrer que :

(1.12) $$\int_{t_o}^{+\infty} || \frac{d}{dt} (e^{itH}\ \mu\ e^{-itH_o}\ e^{iH_o'(t)} f|| \ dt < +\infty \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

Posons :

$$W(t)f = e^{itH}\ \mu\ e^{-itH_o}\ e^{iH_o'(t)} f$$

Alors

$$\frac{d}{dt}W(t) = ie^{itH}(H\mu + \mu(-H_o + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}})\ e^{-itH_o}\ e^{iH_o'(t)}\ f$$

Or

$$[H\mu + \mu(-H_o)]g = [-\Delta,\mu]g + [-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x)]\ \mu g$$

Par suite :

$$\frac{d}{dt}W(t) = ie^{itH}\ \mu(-\frac{2\alpha}{|x|} + p(x) + \frac{\alpha}{t\sqrt{H_o}})\ e^{-itH_o}\ e^{iH_o'(t)}\ f + e^{itH}[-\Delta,\mu]e^{-itH_o}\ e^{iH_o'(t)} f.$$

Les conditions imposées à p, impliquent comme dans le théorème 1.9, l'existence de la linite du premier terme.

Le deuxième terme fait intervenir des fonctions à support compact, et il n'y a aucune peine à montrer que là aussi la limite existe.

Remarques : Lorsque $\alpha = 0$, ce résultat avait été démontré par Ikebe pour $n = 3$ et avec une fonction p décroissante à l'infini comme $|x|^{-(2+\varepsilon)}$ et pour n quelconque par Schenk et Thoe, avec une fonction p continue décroissante à l'infini comme $|x|^{-(\frac{n+1+\varepsilon}{2})}$

Corollaire 4.1

Soit H_α l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(R^n)$ défini par

$$D(H_\alpha) = H^2(R^n)$$

$$H_\alpha u = (-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|})\ u$$

Alors :

(1.13) $W_{\pm}(H_\alpha, H_\alpha, p) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_\alpha} p\, e^{-itH_\alpha} E_\alpha([0,+\infty[)$

existent pourvu que p et μ satisfont les conditions imposées dans la proposition 3.2.

Preuve : C'est une conséquence du théorème 1.2, de la proposition 3.2, et de la transitivité des opérateurs d'ondes.

Remarques :

On aurait pu attendre une démonstration directe de ce résultat car la décomposition spectrale de H_α permet de connaître e^{-itH_α}. Nous avons préféré la methode indirecte qui permettait l'utilisation des résultats établis dans le lemme 1.4.

L'objet de la suite sera de montrer entre autres que ces opérateurs d'ondes sont complets ie.

$$\mathrm{Im}W_+ = \mathrm{Im}W_- = E_\alpha([0,+\infty[)\ L^2(R^n)$$

§2. Développement en fonction de l'opérateur $H_{\alpha,p}$. Expression stationnaire des opérateurs d'ondes.

Il s'agit en premier lieu de prouver l'existence de fonction $\phi_{\pm}(x,\xi)$, $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tq $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\phi_{\pm}(.,\xi) \in H^2_{loc}(\overline{\Omega})$, solutions de l'équation =

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x) - |\xi|^2)\ \phi_{\pm}(x,\xi) = 0 \qquad x \in \Omega$$

$$(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma)\ \phi_{\pm}(x,\xi) = 0 \qquad x \in \Gamma_1 \tag{2.1}$$

$$\phi_{\pm}(x,\xi) = 0 \qquad x \in \Gamma_2$$

Le choix de ces solut ions n'est pas quelconque puisque ces fonctions doivent nous permettre de diagonaliser l'opérateur $H_{\alpha,p}$. Aussi chercherons nous ces solutions $\phi_{\pm}(x,\xi)$ comme une perturbation des fonctions propres généralisées $\phi_{\alpha}(x,\xi)$ de l'opérateur $H_{\alpha} = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$ dans $\mathbb{R}^n$. De la sorte, on est amené à poser

$$\phi_{\pm}(x,\xi) = \phi_{\alpha}(x,\xi) + v_{\pm}(x,\xi) \tag{2.2}$$

où $v_{\pm}(x,\xi)$ est donc solution du problème

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x) - |\xi|^2)\ v_{\pm}(x,\xi) = -\ p(x)\ \phi_{\alpha}(x,\xi)$$

$$\gamma v_{\pm}(x,\xi) = -\ \gamma\ \phi_{\alpha}(x,\xi) \tag{2.3}$$

ou, pour abréger nous avons posé

$$(\gamma f)(x) = (\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma)\ f(x) \quad x \in \Gamma_1 \qquad (\gamma f)(x) = f(x) \quad x \in \Gamma_2$$

2.1 Fonction sortante

Nous introduisons la définition suivante :

Définition 1 : Soit $u \in H^2_{loc}(\overline{\Omega})$. Nous disons que u est une fonction sortante au point k si :

$$\text{(i)} \quad (\Delta + \frac{2\alpha}{|x|} + k^2)\ u(x) = O(|x|^{-(n+\varepsilon)}, \qquad \varepsilon > 0 \tag{2.4}$$

(ii) u satisfaisant à la condition de radiation sortante de Sommerfeld:

$$1) \qquad u(x) = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}}) \qquad 2) \quad \frac{\partial u}{\partial |x|} - ik\,u(x) = o\left(|x|^{-\frac{n-1}{2}}\right)$$

Proposition 4.3.

Soit $u \in H^2_{loc}(\bar{\Omega})$, satisfaisant l'équation

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x) - k^2)\, u(x) = o \qquad x \in \Omega$$

$$(\frac{\partial u}{\partial \nu}) - \sigma u)\,(x) = o \qquad x \in \Gamma_1 \tag{2.5}$$

$$u(x) = o \qquad x \in \Gamma_2$$

où (a) p est une fonction réelle mesurable satisfaisant les hypothèses 2 (i) et (ii) du théorème 2.1

(b) il existe un compact $K \subset \bar{\Omega}$, d'intérieur vide, de complémentaire connexe , tel que p est localement bornée dans le complémentaire de K .

(c) k est un nombre complexe satisfaisant $\mathrm{Im}\, k \geq o$, $\mathrm{Re}\, k > o$

(d) σ est une fonction réelle, définie dans Γ_1, lipschitzienne

Alors, si u satisfait les conditions de radiation sortantes de Sommerfeld (2.4 (ii)) , u est identiquement nulle .

Preuve :

La condition (2.4) (ii) , et la formule de Green impliquent :

$$ik \int_{|x|=R} \overline{u(x)}\, u(x)\, d\sigma = \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial |x|}\, \overline{u(x)}\, d\sigma + o(1) \tag{2.6}$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \overline{u(x)}\, d\sigma + \int_{\Omega_R} \left[(\Delta u)\, \overline{u(x)} + |\nabla u|^2\right] dx + o(1)$$

Comme u est solution de l'équation (2.5), on a encore l'égalité avec :

$$\int_{\Gamma_1} \sigma(x)\, |u(x)|^2\, d\sigma + \int_{\Omega_R} \left[p(x) - \frac{2\alpha}{|x|} - k^2)\, |u(x)|^2 + |\nabla u|^2\right] dx + o(1) \tag{2.7}$$

Prenant la partie imaginaire de (2.6) et (2.7) , on a :

$$\mathrm{Re}\, k \int_{|x|=R} |u(x)|^2\, d\sigma = -\,\mathrm{Im}\, k^2 \int_{\Omega_R} |u(x)|^2\, dx + o(1)$$

1) Supposons $\mathrm{Im}\, k = o$, $k > o$, alors

$$\int_{|x|=R} |u(x)|^2\, d\sigma \longrightarrow o \quad \text{lorsque} \quad R \to \infty$$

Par suite , pour tout $b > o$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{R<|x|<R+b} |u(x)|^2 \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_R^{R+b} dr \left(\int_{|x|=r} |u(x)|^2 \, d\sigma \right) = o$$

Mais alors le théorème 2.1. implique que u est à support compact . Par suite, l'hypothèse b) , l'équation (2.5), et le principe de l'unicité du prolongement pour les équations elliptiques, impliquent que u est identiquement nulle dans Ω .

2) Supposons $\mathrm{Im}k > o$, $k > o$, d'où $\mathrm{Im}k^2 > o$. Mais alors

$$\int_{\Omega_R} |u(x)|^2 \, dx \longrightarrow o \quad \text{lorsque} \quad R \to \infty$$

Donc $u \equiv o$ dans Ω .

Proposition 4.4

Soit $F(k, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ le noyau défini dans les propositions 1.6 et 1.7 . Alors F est la solution fondamentale sortante de l'opérateur

$$-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} - k^2 \quad \text{dans} \quad L^2(\mathbb{R}^n) , \quad n \geq 3$$

Preuve :

Nous partons avec la première représentation de la proposition 1.7 . Nous avons après un changement de variable :

$$(2.8) \quad F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = C(k) \frac{e^{iku}}{(u)^{\frac{n-1}{2}} - i\nu} \int_o^{+\infty} e^{-2\sigma} \sigma^{\mu+i\nu} (1+ \frac{i\sigma}{ku})^{\mu-i\nu} \frac{I_\mu(z(\sigma))}{(\frac{z(\sigma)}{2})^\mu} \, d\sigma$$

où $z(\sigma) = \sigma(\frac{u^2 - v^2}{u^2})^{1/2} (1 + \frac{u}{i\sigma})^{1/2}$; $\mu = \frac{n-3}{2}$; $u = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$;

$$v = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \; ; \; -\Pi/2 < \arg k < \Pi/2 \; ; \; \alpha \frac{\mathrm{Im}k}{|k|^2} < \frac{n-1}{2}$$

Nous voulons montrer que F satisfait à la condition de radiation sortante . Tout d'abord si nous démontrons que l'intégrale est bornée lorsque $\vec{r}_1$ reste dans un compact $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ et k reste dans un compact $K_2 \subset \mathbb{C}_\alpha^+$,il est clair que le coefficient de l'intégrale , permet d'assurer

$$(2.9)\qquad |F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2)| \leq C(K_1,K_2)\ (\frac{1}{r_2})^{+(\frac{n-1}{2})} \left[e^{-(Imk)r_2}\ (r_2)\ \frac{\alpha\ Imk}{|k|^2}\right]$$

Pour cela, choissons A , et B assez grand tel que

$$2\ r_1^{1/2}\ (\frac{|k|}{A} + \frac{1}{B})^{1/2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall\ \vec{r}_1 \in K_1\ ,\ \forall k \in K_2$$

Alors , pour tout $\vec{r}_2$, $r_2 > B$,

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-2\sigma}\ \sigma^{\mu+i\nu}\ (1 + \frac{i\sigma}{ku})^{\mu-i\nu}\ \frac{I_\mu(z(\sigma))}{(z(\sigma)/2)\mu}\ d\sigma\right| \leq \int_A^{\infty} e^{-\sigma}\ \sigma^p\ d\sigma < +\infty$$

La fonction sous le signe intégrale est une fonction bornée dans $[0,A]$ uniformément lorsque $\vec{r}_1 \in K_1$, $k \in K_2$. Donc l'intégrale sur cet interval est une quantité bornée uniformément dans K_1 et K_2 .
Par suite , on a (2.9) .

La dérivation de $F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ par rapport à r_2 fait intervenir 4 termes . Le premier terme provient de la dérivation de $e^{ik(r_1+r_2)}$ et est égal à $ik\ F$. Tous les autres termes permettent d'obtenir une fonction qui décroît comme

$$r_2^{-(\frac{n+1}{2} - \alpha \frac{Imk}{|k|^2})}\ e^{-(Imk)r_2}$$

Donc :

$$(2.10)\qquad F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) - ik\ F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = o(\ r_2^{-(\frac{n-1}{2} - \alpha \frac{Imk}{|k|^2}}\ e^{-(Imk)r_2})$$

Nous allons montrer que $F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ est un noyau de Levi , c'est-à-dir

$$(F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) - \frac{1}{(n-2)}\ \frac{1}{\omega_n}\ \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{n-2}}) = 0\ (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{2-n+\mu})$$

$$D_i\ (\qquad\qquad " \qquad\qquad " \quad) = 0\ (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{1-n+\mu})$$

$$D_j D_i\ (\qquad\qquad " \qquad\qquad " \quad) = 0\ (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{-n+\mu})$$

ou $\quad o \leq \mu \leq 1$.

Nous partons avec la représentation :

$$F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{(-ik)^{n-2}}{(4\Pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_1^{\infty} e^{iku\xi} (\frac{\xi+1}{\xi-1})^{i\nu}\ (\xi^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\ \frac{I_{\frac{n-3}{2}}(z(\xi))}{(\frac{z(\xi)}{\quad})^{\frac{n-3}{2}}}\ d\xi$$

Soit K_1 un compact $\subset R^n \times R^n$. Soit A un nombre positif : la fonction sous le signe intégral est continue en ξ dans $[1,A]$. Elle est bornée par une fonction $g(A,\xi)$, indépendante de $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, k , pour $Imk \geqslant o$, intégrable sur $[1,A]$. Par suite, si on écrit

$$F(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = C(k) \left[\int_1^A f(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2,\xi)d\xi + \int_A^\infty f(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2,\xi)d\xi\right] = F_1 + F_2$$

on a :

$$|F_1(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2)| \leqslant C_1(K_1,A) \int_1^A g(A,\xi)\, d\xi \leqslant C_2(K_1,A)$$

Choisissons A assez grand de façon à pouvoir écrire :

$$(1 + \frac{1}{\xi})^{i\nu}\ (1 - \frac{1}{\xi})^{i\nu} = 1 + \frac{a_1(k)}{\xi} + \frac{a_2(k)}{\xi^2} + \quad + \frac{a_p(\xi\ ,\ k)}{\xi^p}$$

où $p > n-1$, $a_i(k)$ est une fonction continue de k dans $\mathbb{C}_a^+$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$ et $a_p(\xi,k)$ est une fonction bornée .

A cette décomposition, on peut écrire le 2ème terme F_2 , sous la forme

$$F_2 = F_{2,1} + F_{2,2} + \quad + F_{2,p+1}$$

Eliminons tout de suite le terme $F_{2,p+1}$. En effet, la fonction sous le signe intégrale dans $F_{2,p+1}$ est majoré par une fonction $g(\xi)$,intégrable dans $[A\ +\infty[$, $g(\xi)$ indépendante de $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, et de $k(Imk \geqslant o)$. On a aussi :

$$|F_{2,p+1}\ (k,\vec{r}_1,\vec{r}_2)| \leqslant C_3(K_1,A) .$$

Examinons $F_{2,1}$. C'est ce terme qui va amener la singularité la plus forte . Dans ce terme, nous utilisons la représentation (2) de la proposition 1.7, ou plus exactement, nous écrivons $F_{2,1}$, sous la forme :

$$F_{2,1}(k,\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{(-ik)^{n-2}}{4\Pi} \sum_{\ell=o}^{\infty} (u^2-v^2)^\ell \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-2}{2}}{\ell!\ \Gamma(2\ell+n-2)} (-ik)^{2\ell} \int_A^\infty e^{iku\xi} (\xi^2-1)^{\ell+\frac{n-3}{2}} d\xi$$

Ecrivons :

$$(\xi^2 - 1)^\mu = \xi^{2\mu}(1 - \frac{1}{\xi^2})^\mu = \xi^{2\mu}\ (1 - \frac{\mu}{\xi^2} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\ \frac{1}{\xi^4} + \ldots + \frac{1}{\xi^{2\mu}})$$

Nous allons examiner la constitution de chaque terme .

L'intégration sur $[0,A]$ ne posant aucun problème, nous calculons :

$$\frac{1}{4\Pi^{n/2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (u^2-v^2)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-2}{2})}{\ell!\ \Gamma(2\ell+n-2)} \int_0^{+\infty} e^{iku\xi}(-ik\xi)^{2\ell+n-3}\, d(-ik\xi)$$

En faisant le changement de variable, $iku\xi = -s$, le terme ci-dessus est égal

$$\frac{u^{-(n-2)}}{4\Pi^{n/2}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2}\right)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell + n - 2)}{\ell!\ \Gamma(2\ell+n-2)} = \frac{u^{-(n-2)}}{4\Pi^{n/2}}\, \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right)\right]^{-\frac{n-2}{2}}$$

$$(2.11) \qquad = \frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)2\Pi^{n/2}} \frac{1}{v^{n-2}} = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{n-2}}$$

Examinons le 2ème terme : l'intégrale devient

$$(\ell + \tfrac{n-3}{2}) \int_0^{+\infty} e^{iku\xi}\, \xi^{2\ell+n-\xi}\, d\xi = C(k)\, \frac{u^{-(2\ell+n-3)}}{2^{(2\ell+n-3)}}\, \Gamma(2\ell + n-4)$$

puis le terme général, on peut majorer la somme de ces $2\ell-1$ termes par

$$\frac{u^{-(n-3)}}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2}\right)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell+ \frac{n-2}{2})\ \Gamma(2\ell+n-3)}{\ell!\ \Gamma(2\ell + n - 2)}$$

$$+ \frac{u^{-(n-4)}}{2^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{u^2-v^2}{u^2}\right)^{\ell} \frac{\Gamma(\ell+ \frac{n-2}{2})\ \Gamma(2\ell + n-4)}{\ell!\ \Gamma(2\ell + n - 2)}$$

En tenant compte du calcul effectué ci-dessus, on peut montrer que chaque terme amène au plus une singularité du type $\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{n-3}}$.

Nous avons donné le principe de la démonstration . Il est clair que le résultat annoncé dans la proposition se prouve ainsi :

2.2 Solutions dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \cap H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ de l'équation

$$(\Delta + k^2 + \frac{2\alpha}{|x|} + p(x))u = f\ ,\quad k \in \mathbb{C}^{\pm}$$

Notations

Nous partons avec l'hypothèse :

2.12) p est une fonction à valeurs réelles indéfiniment dérivable à support compact dans $\Omega \setminus \{0\}$

Soit $\varepsilon > 0$ et $R > 0$ tels que

supp. $p \subset \Omega_{\varepsilon,R} = \{x \in \Omega \quad \varepsilon < |x| < R\}$

Nous désignons par C_α^+, $B_{\varepsilon,R}$, les ensembles

$$C_\alpha^+ = \{k \in \mathbb{C} \ , \ I_{mk} \geqslant 0 \ , \ \mathrm{Re}\, k > 0 \ ; \ \frac{\alpha I_{mk}}{|k|^2} < \frac{n-1}{2}\}$$

$$_{\varepsilon,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varepsilon < |x| < R\}$$

X désigne l'espace de Banach formé par les fonctions définies et continues dans $\overline{\quad}_{\varepsilon,R}$.

Pour tout $f \in X$, et $k \in C_\alpha^+$, nous posons :

$$u_f(x,k) = \int_{\mathbb{R}^n} F(k,x,y)\ f(y)\ dy.$$

Nous nous fixons une fonction $\phi \in \mathcal{D}(B_{\varepsilon,R})$ telle que $\phi \equiv 1$ au voisinage de Γ.

Proposition 4.5

Pour tout $f \in X$, et tout $k \in C_\alpha^+$, l'équation intégrale

2.13) $$u(x,k) = u_f(x,k) - \int_{\mathbb{R}^n} F(k,x,y)\ p(y)\ u(y,k)\ dy\ ,$$

possède une solution unique dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nous avons les propriétés suivantes :

(i) $u \in C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n) \cap H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$

(ii) u satisfaisant l'équation :

2.14) $$(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x) - k^2)\ u(x,k) = f(x)$$

(iii) $k \longrightarrow u(x,k)$ est continue de C_α^+ dans

$$\mathcal{L}(X, C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n))$$

Preuve ;

Supposons l'existence assurée. Alors sachant que $F(k,x,y)$ est la solution fondamentale de $-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + k^2$ u satisfait l'équation (2.14)(ii) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La proposition 4.4 implique que u est continue, puis par intération $u \in C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n)$.

L'unicité résulte de la proposition 4.3. En effet, grâce à la proposition 4.4, u satisfait aux conditions de Sommerfeld à l'infini.

Prouvons l'existence. Pour cela, introduisons les opérateurs $S(k)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, par

$$(2.15) \qquad (S(k)\varphi)(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} F(k,x,y)\, p(y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Pour tout $k \in C_\alpha^+$, $S(k) \in \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}^n))$. Mieux, l'image est contenue dans $C^1(\mathbb{R}^n)$, et tend vers 0 à l'infini grâce à la proposition 4.4.

Par suite $S(k)$ est un opérateur compact de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ grâce au théorème d'Ascoli Arzela.

Enfin $I + S(k)$ est injectif, car si $\phi = S(k)\phi$, ϕ satisfait l'équation aux dérivées partielles (2.14) (ii) avec $f = 0$, tout en satisfaisant les conditions de radiation de Sommerfeld. Donc $\phi \equiv 0$ d'après la proposition 4.3.

Pourtant compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $C^{1+\mu}(K)$ est un espace de Banach pour $\|\ \|_K$ la norme adéquate. Nous munissons $C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n)$ de la topologie d'espace de Frechet, avec les semi-normes $\|\ \|_{K_n}$, où K_n est une suite croissante tendant vers $\mathbb{R}^n$.

Utilisant la proposition 4.5, et les arguments de la théorie du potentiel il est facile de prouver que l'application :

$$(f,k) \longrightarrow u(x,k)$$

est continue de $X \times C_\alpha^+$ dans $C^{1+\mu}(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part, cette application est continue de $X \times C_\alpha^+$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ d'où (iii).

2.3 - Existence des solutions dans $L^\infty(\bar{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\bar{\Omega})$ du problème extèrieur :

Nous désignons par Γ_ε (resp. Γ_R) la sphère de centre 0 et de rayon ε (resp. R). Nous nous fixons un nombre complexe λ, satisfaisant $(\mathrm{Im}\lambda)\,(\mathrm{Im}\lambda^2) \neq 0$.

Proposition 4.6

Soit $f \in X$, $u(x,k)$ la solution de (2.13).

Appelons h la solution de l'équation :

$$(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} - \lambda^2)\, h(x) = 0 \qquad x \in \Omega_{\varepsilon,R}$$

(2.16)

$$(\frac{\partial}{\partial\nu} - \sigma)\, h(x) = (\frac{\partial}{\partial\nu} - \sigma)u \qquad x \in \Gamma_1$$

$$h(x) = u(x) \qquad x \in \Gamma_2$$

$$h(x) = 0 \qquad x \in \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_R$$

Alors l'opérateur $M(k)$ défini dans X par

$$M(k)f = (p - k^2 - \lambda^2)\,\phi h - (\Delta\phi)h - 2\nabla\phi\,\nabla h\,.$$

est un opérateur compact dans X. Nous avons aussi :

(a) $k \longrightarrow M(k)$ est continue

(b) $I - M(k)$ est injectif.

Preuve:

Comme u appartient à $C^{1+\mu}(R^n)$, on a donc $(\frac{\partial}{\partial\nu}-\sigma)u$ appartient à $C^\mu(\Gamma_1)$. En utilisant la méthode développée par Shenk et Thoe dans [46.2], on montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.16).

Cette solution appartient à $C^1(\Omega_{\varepsilon,R}) \cap C^2(\Omega_{\varepsilon,R})$ et l'application :

$$u \longmapsto h \quad \text{de } C^{1+\mu}(R^n) \text{ dans } C^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon,R}) \text{ est continue.}$$

D'autre part comme $\phi = 1$ (resp. 0) au voisinage de Γ_ε (resp. Γ_R) $\nabla\phi\,\nabla h$ appartient à $C^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon,R})$ donc $M(k)f$ appartient à $C^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon,R})$.

Donc $M(k)$ est un opérateur compact dans X. Ce qui démontre a). Pour prouver b) on va supposer qu'il existe $f \in X$ tel que $M(k)f = f$. Cela revient à dire que :

$$(2.17)\quad f(x) = \left(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} - k^2 + p(x) \right) (\phi\, h)(x) \qquad x \in \Omega_{\varepsilon, R}$$

convenant de poser $f(x)=0$ pour $x \in \Omega_{\varepsilon, R}$, on peut prolonger cette égalité à Ω tout
ntier. Alors en tenant compte de l'équation (2.14), et en posant $w = u - \phi h$, on a :

$$(2.18)\quad \begin{aligned} \left(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} - k^2 + p(x)\right) w(x) &= 0 && x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma\right) w(x) &= 0 && x \in \Gamma_1 \\ w(x) &= 0 && x \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

mme u est une fonction sortante et que ϕ est à support compact, w est donc une
olution sortante de l'équation (2.18), parsuite $w = u - \phi h = 0$ dans Ω.

mme ϕ est égale à 1 au voisinage de Γ, $u=h$ au voisinage de Γ dans Ω. u définit donc
prolongement à l'interieur de Γ. Posons $z(x)=u(x)$ dans $\Omega_{\varepsilon,R}$ et $z(x)=u(x)$ dans Λ
ors z satisfait l'équation :

$$(2.19)\quad \left(\Delta + \frac{2\alpha}{|x|} + q(x)\right) z(x) = 0 \qquad x \in B_{\varepsilon, R} \; ; \; z(x) = 0 \quad x \in \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_R$$

$q(x) = \lambda^2$ si $x \Omega_{\varepsilon R}$ et $q(x) = k^2 - p(x)$ si $x \in \Lambda$.

multipliant l'équation par z et en appliquant la formule de Green, on obtient
$=0$ grâce à l'hypothèse sur λ. Par suite, $h=0$ et $f = M(k) f = 0$.

tations

osons pour tout $\xi \in R^n - \{0\}$ et $k \in C_\alpha^+$

$$(2.19)\quad \psi(k,\xi,x) = (-p + k^2 + |\xi|^2)\phi\, \phi_\alpha(x,\xi) - \Delta\phi\, \phi_\alpha(x,) - 2\nabla\phi\nabla\phi_\alpha + p\phi_\alpha(x,\xi)$$

$$(2.20)\quad f(k,\xi,x) = (I - M(k))^{-1} \psi(k,\xi,.)$$

oit u la solution du problème (2.10) avec f donnée par (2.20) et h la solution du
roblème (2.16). Nous avons alors:

roposition 4.7

Posons :

$$(2.21)\quad v(k,\xi,x) = u(k,\xi,x) - \phi(x)\,(h(x) + \phi_\alpha(x,\xi))$$

ors: 1° $\forall\, k \in C_\alpha^+, \forall\, \xi \in R^n - \{0\}$ $v(k,\xi,x)$ est l'unique solution sortante de l'équatio

$$\begin{aligned} \left(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x) - k^2\right) v &= -p\,\phi_\alpha(x,\xi) && x \in \Omega \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma\right) v &= -\left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma\right) \varphi_\alpha(x,)\, x \in \Gamma_1 \\ v &= -\phi_\alpha(x,\xi) && x \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

2° L'application $(k, \xi, x) \longrightarrow v$ est continue dans $C_\alpha^+ \times R^n - \{0\} \times \bar{\Omega}$

Nous sommes en mesure de démontrer maintenant le théorème principal.

Théorème 4.2

Soit p une fonction à valeurs réelles, indéfiniment dérivable à support compact dans $\Omega \setminus \{0\}$.

1°) Il existe deux familles $\phi_{\pm}(x,\xi)$ de fonctions propres généralisées de l'opérateur $H_{\alpha,p} = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(X)$ telles que

(a) $\forall\ \xi \in R^n \setminus \{0\}$, $\phi_{\pm}(.,\xi) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \cap L^\infty(\bar{\Omega})$

(b) $\left(-\Delta - \frac{2\alpha}{|x|} + p(x)\right) \phi_{\pm}(x,\xi) = |\xi|^2\, \phi_{\pm}(x,\xi)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \sigma\right) \phi_{\pm}(x,\xi) = 0 \qquad x \in \Gamma_1$$

$$\phi_{\pm}(x,\xi) = 0 \qquad x \in \Gamma_2$$

2°) Les transformations $\mathcal{F}_{\pm}$, définies par

$$(\mathcal{F}_{\pm} f)(\xi) = \lim_{N \to \infty} \int_{x \in \Omega, |x|<N} \overline{\phi_{\pm}(x,\xi)}\, f(x)dx$$

$$(\bar{\mathcal{F}}_{\pm} g)(x) = \lim_{n \to \infty} \int_{K^n} \phi_{\pm}(x,\xi)\, g(\xi)\, d\xi$$

où K_n est une suite croissante de compacts de $R^n\{0\}$, $\bigcup_n K_n = R^n - \{0\}$, définissent respectivement des isométries de $E([0, +\infty[)\, L^2(\Omega)$ sur $L^2(R)$ et de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $E([0, +\infty[)L^2$ et sont adjointsl'un de l'autre.

Nous avons

$$E(0, +\infty)H_{\alpha,p} = \bar{\mathcal{F}}_{\pm}\, Q_{|\ |^2}\, \mathcal{F}_{\pm}$$

où $(Q_{|\ |^2}\, g)\,(\xi) = |\xi|^2 g(\xi)$

En particulier $H_{\alpha,p}$ est absolument continu sur $[0, +\infty[$

3°) Les opérateurs d'ondes $W_{\pm}(H_{\alpha,p}, H_{\alpha}) = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_{\alpha,p}}\, \mu\, e^{-itH_{\alpha}}\, E_{\alpha}([0, +\infty[)$

existent, sont égaux à

$$W_{\pm}(H_{\alpha,p}, H_{\alpha}) = \bar{\mathcal{F}}_{\pm}\, \mathcal{F}_{\alpha}$$

Par suite, ils sont complets.

La preuve de ce théorème se fait à travers les lemmes suivants. Pour enoncer le lemme 1, nous fixons les éléments suivants :

Pour $\alpha > 0$, nous appelons λ_n (resp. ϕ_n) les valeurs propres negatives (resp. les fonctions propres associées) de l'opérateur $H_\alpha = -\Delta - \frac{2\alpha}{|x|}$.

On convient d'écrire si $\alpha \leq 0$, $\phi_n \equiv 0$ pour tout n.

Pour tout $k \in C_\alpha^+$ nous notons par $v_n^+(k,x)$ l'unique solution sortante du p problème (2.5) avec comme second membre $(-p(x)\,\phi_n(x)\,;\,(\frac{\partial}{\partial\nu} - \sigma)\phi_n\,;\,-\phi_n)$

Nous posons :

$$w_\pm(k,\xi,x) = \phi_\alpha(x,\xi) + v_\pm(k,\xi,x)$$

$$w_\pm^n(k,x) = \phi_n(x) + v_\pm(\ ,x)$$

Nous avons alors, le lemme :

Lemme 4.1

Soit $k \in C_\alpha^+$, $\quad 0 < \arg k < \pi/2$. Soit $f \in \mathcal{D}(R_n)$ et $(\mathcal{F}_\alpha f)$ nulle au voisinage de 0

Alors

$$(H_{\alpha,p} - k^2)^{-1}(f|_\Omega)\ (x) = \int_{R_n} w_\pm(k,\ ,x)\ \frac{(\mathcal{F}_\alpha f)(\xi)}{|\xi|^2 - k^2}\,d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} w_\pm^n(k,x)\ \frac{(f|\phi_n)}{(\lambda_n - k^2)}$$

Nous avons aussi

Lemme 4.2

Soit E la mesure spectrale de $H_{\alpha,p}$

$\Delta = [a,b]$ où $0 < a < b$

Alors $\qquad (E(\Delta)\ u|u) = \int_{|\xi|^2 \in \Delta} |\mathcal{F}_\pm u(\xi)|^2 d\xi$

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON

(1) Lower bounds for solutions of Schrödinger equation. J.An. Math. 23 (1970)

(2) Spectral properties of Schrödinger operators. Cong. Int. Math (1970) T.2

[2] P. ALSHOM et T. KATO

Scattering with long range potentials (preprint) 1971

[3] P. ALSHOM et G. SCHMIDT

Spectral and scattering theory for Schrödinger operators Arch. Rat. Mec. An. 40 4 (1971)

[4] W.O. AMREIN - Ph.A. MARTIN - B. MISRA

On the asymptotic condition of scattering theory. Helv. Phys. Act. 43 (1970)

[5] V.S. BUSLAEV et V.B. MATVEEV

Wave operator for the scattering equation with a slowly decreasing potential. Theo. Math. Phys. 2 (1970)

[6] H. BATEMAN

Higher transcendental functions : vol. 1.2.3. MAC GRAW-HILL (1953)

[7] M. BERTERO - G. TALENTI - G.A. VIANO

Eigenfunctions expansion associated with Schrödinger two particles Nuovo Cimento

[8] S.M. BIRMAN

(1) a criterion for the existence of the complete wave operators in the theory of scattering with two spaces . . Izvestija vol 5 (1971) N°2

(2) a local criterion for the existence of the wave operators : MATH USSR IZVESTIJ. vol. 2 (1968) (5) .

[9] H. BUCHHOLZ

The confluent Hypergeometric function . SPRINGER - VERLAG (1969)

[10] J.C. CANTINAT

Perturbation du Laplacien dans $\mathbb{R}^3$ par un potentiel singulier complexe . Th. de 3^e cycle . DIJON (1972)

[11] J.M. COMBES et J. AGUILAR
a class of analytic perturbations for Schrödinger hamiltonians Com. Math. Phys. (1971)

[12] R. COURANT et D. HILBERT
Methods of Mathematical Physics I.II Inter science .

[13] J. DIXMIER
(1) les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien . GAUTHIER VILLARS (1967)
(2) Cours de théorie spectrale - PARIS VII (1972) .

[14] J.D. DOLLARD
(1) Non relativistic time dependant scattering theory and the coulomb interactio Thèsis - Princeton (1963) .
(2) Asymptotic convergence and the coulomb interaction : J.M.P. 5 (1964)

[15] N. DUNFORD et S.T. SCHWARTZ
Linear operators (I.II) Interscience (1960 - 67)

[16] J.C. GUILLOT
Perturbation du laplacien dans $\mathbb{R}^3$ par des potentiels de type coulombien .
C R A S t 277 (1973) .

[17] J.C. GUILLOT et G. SCHMIDT
Spectral and scattering theory for DIRAC operators (1971) .

[18] C. GOLDSTEIN
(1) Eigenfunction expansion associated with the Laplacien for certain domains with infinite boundaries : A.M.S. (1969)
(2) Meromorphic continuation of the S-matrix of the operator - Δ acting in a cylinder : A.M.S. (1970)
(3) Scattering theory for elliptic differential operators in unbounded domain I.II A.M.S. (1972) I.II

[19] T.A. GREEN et O.E. LANDFORD
Rigorous derivation of the phase schift formula for the hilbert-space scattering operator of a single particle : J.M.P. 102 (1960) .

20] V.V. GRUSIN
On sommerfeld- type condition for a certain class of partial differential equations .

21] S. HELGASON
Differential geometry and symmetric spaces Academic Press. 1962 .

22] K. HOFFMAN
Banach spaces of analytic functions Prentice Hall (1962).

23] L.C. HOSTLER
(1) Coulomb GREEN'S function and the furry approximation J.M.P. 55 (1964)
(2) Coulomb GREEN'S function in f-dimensional space J.M.P. 11 (1970)

24] J.S. HOWLAND
(1) Banach space technique in the perturbation of self-adjoint operators with continious spectra : J.M. An. App. 20 (1967)
(2) a perturbation theoretic approach to eigenfunction expansion J. Funct. Anal. 2 (1968) .

25] T. IKEBE
(1) On the eigenfunction expansion connected with the exterior problem for the Schrödinger equation : Jap. J . Math. 36 (1966)
(2) Scattering for the Schrödinger operator in an exterior domain : J.Math. Kyo.Un. 7 (1967)
(3) on the phase-schift formula for the scattering operator : Pac. J. Math. (1965

26] T. IKEBE - T. KATO
Uniqueness for the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators : Arch. Rat. Mech. anal. 9 (1962) .

27] T. IKEBE - Y. SAITO
Limiting absorption method and absolute continuity for Schrödinger operator : J.M. Kyo. 12(1972) .

28] T. KATO
(1) Perturbation theory for linear operators : SPRINGER 1966
(2) Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a [illegible] Math 12 (1959)

[29] T. KATO et S.T. KURODA
Theory of simple scattering and eigenfunction expansion
Func. An. and relat fields - SPRINGER (1970).

[30] K. KODAIRA
The eigenvalue problem of ordinary differential equation of the second order and Heiseiberg theory of S-matrice. A.J.M. 71 (1949)

[31] S.T. KURODA
(1) on a paper of Green and Landford : J.M.P. 3 (1962)
(2) some remarks on scattering for schrödinger operators J.F Sc. Um. Tokyo Sect. I A Vol. 27 .
(3) Scattering theory for differential operators (I.II) J. Math. S. Japan (1973)

[32] P.D. LAX - R.S. PHILLIPS
(1) Scattering Theory : Academic Press (1967)
(2) On the exterior problem for the reduced wave equation (preprint)
(3) Scattering theory for dissipative hyperbolic systems (à paraître).

[33] R. LAVINE
(1) Absolute continuityof positive spectrum of Schrödinger operators with long range potentials : J. Funct. Anal . 12 (1973).

[34] J.L. LIONS et E. MAGENES
Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.2 Dunod (1968).

[35] K. MOCHIZUKI
Spectral and scattering theory for symmetric hyperbolic systems in an exterior domain : R.I.M.S Kyoto Un. 5 (1969).

[36] W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - R.P. SONI
Formulas and theorems for the special functions of Math. Phys. SPRINGER (1966).

[37] D. MARCHESIN et M.L. O'CAROLL
Time independant and time dependant potential scattering for asymptotically coulomb potentials. J.M.P. 13 (1972).

[38] V.B. MATVEEV et M.M. SKRIGANOV
Scattering problem for radial equation with a slowly decreasing potentials : Teor. Mat. Fiz 10 (1972).

[39] C. MIRANDA
Partial Differential equation of elliptic Type. SPRINGER (1970).

[40] S. MIZOHATA
Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur $-\Delta$ relatif au problème extérieur.

[41] R.G. NEWTON
Scattering theory of waves and particles Mac Graw (1966).

[42] P.A. REJTO
(1) on partly gentle perturbations : I. II. III : Jour. Mat An. App. (1967-1969)
(2) on the essential spectrum of the hydrogen energy and related operators Pac. J. Mat Ch. 19 (1966)
(3) On a theorem of TITCHMARSCH - WEIDMANN concerning absolutely continuious operators (preprint).

[43] F. RELLICH
Über das asymptotische Verhalten der Lösingen von $\Delta u + \lambda u = o$ in unenderchen Gebriten : Iber. Deut. Math. Verein 53 (1942).

[44] L.A. SAHNOVIC
Generalized wave operators : MAT. SBORNIK 10 (1972).

[45] M. SCHECHTER
Spectra of partial differential operators : App. Math. et Mech. V. 14.

[46] N. SHENK and D. THOE
(1) Outgoing solutions of $(-\Delta+q-k^2)u=f$ in an exterior domain : J.M.An.Ap.31(1970
(2) Eigenfunctions expansion and scattering theory for perturbation of $-\Delta$. J M M A 36 (1971)
(3) Resonantes states and poles of the scattering matrix for perturbation of $-\Delta$: J. M M A 37 (1972).

[47] Y. SCHIZUTA

Eigenfunction expansion associated with the operator $-\Delta$ in the exterior domain : Proc. Jap. Acad. 39 (1963).

[48] B. SIMON

Quantum mechanicsfor Hamiltonian defined as quadratic forms -Thesis Princeton University Press (1971).

[49] E.C. TITCHMARSCH

Eigenfunction expansion associated with the second order differential equations I.II OXFORD - CLARENDON Press (1948).

[50] L.E. THOMAS

On the spectral properties of some one particle Schrödinger Hamltonians .

[51] H. UESAKA

The Green function for $\sum_{n=1}^{3} (i \frac{\partial}{\partial x_n} - b_n)^2 u = \lambda u$ in the exterior problem.

Application to the eigenfunction expansion RIMS KYOTO 8 (1972-73).

[52] C. WILCOX

(1) Wave operators ans asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics : Arch. Rat. Mec. An. 22 (1966).

(2) Sphérical means and radiations conditions Arch. Rat. Mech. An. 3 (1959).

(3) The analytic consumations of the resolvent kernel in scattering theory Ed. Conf. on pat. dif. Eq. (1967).

[53] WATSON

a treatise on the theory of Bessel functions Cambridge. Press. 1966.

[54] WHITTAKER-WATSON

a course of modern analysis Cambridge Press 1963.

[55] C. ZEMACH-F.ODEH

Uniqueness of radiations solutions to the Schrödinger operators.

[56] K. ZIZI - H. HAYAT

Travaux de BIRMAN concernant les perturbations des opérateurs autoadjoints par des opérateurs nucléaires. Pub. du Centre Math. de l'école polytechnique M 5502

[57] K. ZIZI

(1) Sur une généralisation d'un résultat de Dollard C.R.Acad. Sc. PARIS t.277 Ser A. pa.513.

(2) Perturbation de l'opérateur $-\Delta$ par un potentiel à symétrie sphérique, asymptotiquement coulombien dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n>2$ C.R.Acad.Sc.PARIS t.277

[58] E.BALSLEV

The singular spectrum of elliptic differential operators in $L^p(R^n)$
Math.Scand. 19 - 13 (1966)

[59] F. WOLF

On the essential spectrum of partial differential boundary problems
Com .Pure App.Math. 12 (1959)